

## RESPUESTA SÍSMICA Y DIFRACCIÓN POR GRIETAS CON EL MÉTODO INDIRECTO DE ELEMENTOS DE FRONTERA

A. Rodríguez-Castellanos <sup>(1)</sup>, R. Ávila-Carrera <sup>(1)</sup> y F. J. Sánchez-Sesma <sup>(2)</sup>

### RESUMEN

La presencia de grietas en materiales elásticos provoca dispersión y difracción durante la propagación de ondas. En algunos problemas de ingeniería, bajo ciertas condiciones, las amplitudes de los desplazamientos en superficie muestran picos, los cuales han sido atribuidos a resonancias locales del estrato contenido entre la cara superior de la grieta y la superficie libre. Para muchas aplicaciones, tales como pruebas no destructivas o exploraciones petroleras, el campo difractado producido durante la propagación de ondas proporciona valiosa información para la detección y caracterización de grietas u otras heterogeneidades. En este trabajo empleamos el Método Indirecto de Elementos de Frontera (MIEF) para estudiar la difracción de ondas P, SV y de Rayleigh en un medio agrietado. Este método se basa en una representación integral del campo elástico difractado usando fuentes de frontera de capa simple. Nuestro método es validado comparando los resultados obtenidos con otros existentes en la literatura. Los resultados, en frecuencia, muestran la existencia de picos de resonancia que varían según la profundidad de la grieta, estando más definidos para el caso de grietas muy superficiales. Esto mismo puede observarse en los resultados en tiempo.

### SUMMARY

The presence of subsurface cracks may give rise to scattered body and surface waves. For example, in some engineering problems, under certain conditions the amplitude spectra of those waves clearly show conspicuous resonance peaks, which are associated to the trapped energy of the layer located between the upper crack face and the free surface. For many applications such as non-destructive testing or in oil exploration the scattered field yields valuable information to detect cracks and other scatterers from surface waves. We use the Indirect Boundary Element Method to study scattering of P, SV and Rayleigh in a cracked medium. The method is based on the integral representation for scattered elastic waves using single layer boundary sources. We test our method by comparing the results to those previously published. Diffraction by multiple cracks with different configurations is presented. Results in frequency and time domains are displayed. In frequency domain, conspicuous peaks are seen, which are more defined for the case of shallower cracks than for deeper ones. We have found that there are more wave interactions for the case of deeper cracks than for shallower ones. This is due to the wave has more distance to recover its wave front.

---

Artículo recibido el 25 de abril de 2003 y aprobado para su publicación el 17 de junio de 2004. Se aceptarán comentarios y/o discusiones hasta cinco meses después de su publicación.

<sup>(1)</sup> Instituto Mexicano del Petróleo; Eje Central Lázaro Cárdenas 152; Col. San Bartolo Atepehuacan; Gustavo A. Madero 07730 México D.F., México. [arcastel@imp.mx](mailto:arcastel@imp.mx), [rcarrer@imp.mx](mailto:rcarrer@imp.mx)

<sup>(2)</sup> Instituto de Ingeniería, UNAM; Ciudad Universitaria, Apdo. 70-472; Coyoacán 04510 México D.F., México. [sesma@servidor.unam.mx](mailto:sesma@servidor.unam.mx)

## INTRODUCCIÓN

La presencia de grietas en elementos estructurales o componentes mecánicos es relativamente frecuente en diversas instalaciones industriales. Tales grietas son ocasionadas por cargas excesivas, fatiga del material y defectos inherentes al proceso de fabricación e instalación. Estas irregularidades son motivo de estudio para investigadores e ingenieros del área estructural y mecánica. Las herramientas comunes de la resistencia de materiales (e.g. Timoshenko, 1963) en ocasiones resultan insuficientes para el análisis del comportamiento de medios agrietados. Entonces es necesario emplear los criterios desarrollados en la mecánica de la fractura.

Las ideas fundamentales sobre el comportamiento de sólidos agrietados se deben a A. Griffith, quién las introdujo mediante un planteamiento energético (Griffith, 1921). Años más tarde Irwin (1948) y Orowan (1948) sentaron las bases para establecer a la mecánica de la fractura como una disciplina de la ingeniería. Casi una década después Irwing (1957) introdujo un concepto fundamental en la mecánica de la fractura, relacionando la energía de deformación liberada, propuesta por Griffith, con el Factor de Intensidad de Esfuerzos (FIE). Este parámetro es fundamental en la mecánica de la fractura lineal elástica pues permite conocer la intensidad de los esfuerzos desarrollados en la vecindad de la punta de una grieta. Además, el FIE es determinante en el crecimiento de las grietas en los sólidos. Si este crecimiento es rápido se puede tener el denominado comportamiento frágil.

Al mismo tiempo fueron introducidos a la mecánica de la fractura conceptos como velocidades de propagación de ondas en sólidos, evaluación de la energía cinética en un cuerpo agrietado y velocidades límite de propagación de grietas (Mott (1948), Roberts y Wells (1954) y Stroh (1957), respectivamente). Con lo que se inició el estudio de problemas relacionados con los efectos dinámicos en sólidos agrietados, sentando las bases de la Dinámica de la Fractura.

Una importante contribución a la dinámica de la fractura fue realizada por Yoffé (1951) quién determinó el campo de esfuerzos en la vecindad de la punta de una grieta propagándose en una región infinita. Otros investigadores como Craggs (1960), Broberg (1960), Baker (1962) y Freund (1972) estudiaron el problema de curvado, ramificación y arresto de grietas, además de la difracción de ondas en sólidos debido a la presencia de grietas estacionarias o propagándose.

Paralelamente, se han desarrollado métodos numéricos para la solución de problemas en dinámica de la fractura y específicamente para aquellos relacionados con la interacción de ondas en medios agrietados. Estos métodos han servido para simular componentes o sistemas agrietados sujetos a diferentes condiciones de carga y de frontera. Por ejemplo, Chen (1975) fue quién inicialmente aplicó el método de diferencias finitas a problemas de propagación de ondas en medios agrietados. En su trabajo reporta la solución del problema de una placa con dimensiones finitas, que posee una grieta central, sujeta a una carga súbita de tensión. Chen comparo sus resultados con los reportados por Baker (1962), quién solucionó analíticamente el mismo problema pero formulado en un medio infinito. Los resultados obtenidos coinciden satisfactoriamente hasta cierto punto, dado que en el problema desarrollado por Baker no se contempla la reflexión de ondas en las fronteras por haber considerado un dominio infinito. Ahora es bien sabido que la aplicación del método de diferencias finitas se reduce a geometrías

sencillas, resultando poco atractivo para problemas con mayor complejidad geométrica (Kanninen, 1978). Frangi (1998) y Rodríguez *et al.* (1999) resolvieron el mismo problema mediante el método de elementos de frontera y el método de elementos finitos, respectivamente. Ellos observaron que el comportamiento del sistema analizado se basa principalmente en la interacción de ondas entre las fronteras de la placa y las superficies de la grieta. Esta interacción da resultado a la generación de fuertes alteraciones al comportamiento del FIE.

A principios de los 90's fue desarrollada una formulación denominada Método Indirecto de Elementos de Frontera (MIEF), la cual ha sido aplicada exitosamente en la propagación de ondas SH, P, SV y de Rayleigh en medios elásticos (e.g. Sánchez-Sesma *et al.* 1991, 1993 y 1995; Luzón *et al.* 1997; Vai *et al.* 1999). Este método se emplea en este trabajo con el propósito de analizar la respuesta sísmica y difracción por una o varias grietas en un medio elástico, ante incidencia de ondas P, SV y Rayleigh. El método se basa en una representación integral del campo elástico difractado en términos de fuentes de frontera de capa simple, la cual se deriva de la identidad de Somigliana. La introducción de las condiciones de frontera conduce a una ecuación integral del tipo Fredholm de segunda clase de fuentes de frontera. Se emplea un esquema de discretización basado en una integración numérica y analítica de las funciones exactas de Green para desplazamientos y tracciones.

## METODO INDIRECTO DE ELEMENTOS DE FRONTERA

### Representación integral

Sea un dominio  $V$ , delimitado por su frontera  $S$ . Si este dominio esta formado por un material elástico, el campo de desplazamientos armónicos puede ser escrito, despreciando las fuerzas de cuerpo, por

$$u_i(\mathbf{x}) = \int_S \phi_j(\xi) G_{ij}(\mathbf{x}; \xi) dS_\xi, \quad (1)$$

donde  $u_i(\mathbf{x})$  es la  $i$ -ésima componente de desplazamiento en  $\mathbf{x}$ ,  $G_{ij}(\mathbf{x}; \xi)$  es el tensor de Green, el cual representa el desplazamiento en la dirección  $i$  en el punto  $\mathbf{x}$  debido a la aplicación de una fuerza unitaria en dirección  $j$  en el punto  $\xi$ , y  $\phi_j(\xi)$  es la densidad de fuerza en la dirección  $j$ . El producto  $\phi_j(\xi) dS_\xi$  en la integral representa a una distribución de fuerzas sobre la superficie  $S$ . El subscrito en la diferencial muestra la variable sobre la cual es realizada la integración. Esta representación integral se puede obtener a partir de la identidad de Somigliana (Sánchez-Sesma y Campillo, 1991). Kupradze (1963) demostró que si  $\phi_j(\xi)$  es continua a lo largo de  $S$ , entonces el campo de desplazamientos es continuo a través de  $S$ . De esta manera, el cálculo de esfuerzos y tracciones se realiza mediante la aplicación directa de la Ley de Hooke y la ecuación de Cauchy (excepto en singularidades de frontera, esto es cuando  $\mathbf{x}$  es igual a  $\xi$  sobre la superficie  $S$ ).

Mediante un proceso límite basado en consideraciones de equilibrio alrededor de una vecindad de la frontera, es posible escribir las tracciones para  $\mathbf{x}$  sobre  $S$  como

$$t_i(\mathbf{x}) = c\phi_i(\mathbf{x}) + \int_S \phi_j(\xi) T_{ij}(\mathbf{x}; \xi) dS_\xi, \quad (2)$$

donde  $t_i = i$ -ésima componente de tracción asociada a la dirección normal  $n(\mathbf{x})$ , frontera suave,  $c = 0.5$  si  $\mathbf{x}$  tiende a  $S$  desde dentro de la región,  $c = -0.5$  si  $\mathbf{x}$  tiende a  $S$  desde fuera de la región y  $c = 0$  si  $\mathbf{x}$  no esta contenida en  $S$ .  $T_{ij}(\mathbf{x}; \xi) =$  tensor de Green de tracciones, es decir, la tracción en la dirección  $i$  en el punto  $\mathbf{x}$ , sobre la frontera con normal asociada  $n(\mathbf{x})$ , debido a la aplicación de una fuerza unitaria en la dirección  $j$  en  $\xi$  sobre  $S$ .

### Funciones de Green bidimensionales

En un medio infinito, elástico, homogéneo e isótropo, las funciones de Green para dependencia tiempo-armónico  $e^{i\omega t}$ , donde  $i^2 = -1$ ,  $\omega =$  frecuencia angular, y  $t =$  tiempo, pueden expresarse como

$$G_{ij} = A\delta_{ij} - B(2\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}), \quad (3)$$

$$T_{ij} = \frac{\mu}{r} \left\{ \left[ -4B + \lambda \frac{D(\omega r / \alpha)}{2\mu\alpha^2} \right] \gamma_j n_i + \left[ -4B + \frac{D(\omega r / \beta)}{2\beta^2} \right] \times \left[ \gamma_i n_j + \gamma_k n_k \delta_{ij} \right] \right\} +, \quad (4)$$

$$\frac{\mu}{r} \left\{ (C + 16B) \gamma_i \gamma_j \gamma_k n_k \right\}$$

donde

$$A = \frac{1}{i8\rho} \left[ \frac{H_0^{(2)}(\omega r / \alpha)}{\alpha^2} + \frac{H_0^{(2)}(\omega r / \beta)}{\beta^2} \right], \quad (5)$$

$$B = \frac{1}{i8\rho} \left[ \frac{H_2^{(2)}(\omega r / \alpha)}{\alpha^2} - \frac{H_2^{(2)}(\omega r / \beta)}{\beta^2} \right], \quad (6)$$

$$C = \frac{D(\omega r / \alpha)}{\alpha^2} - \frac{D(\omega r / \beta)}{\beta^2}, \quad (7)$$

$$D(p) = \frac{i}{2\rho} p H_1^{(2)}(p), \quad (8)$$

$\lambda$  y  $\mu$  son las constantes de Lamé,  $\rho$  es la densidad de masa,  $\alpha$  y  $\beta$  corresponden a las velocidades de propagación de ondas P y S, respectivamente;  $r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}$ ,  $\gamma_j = (x_j - \xi_j)/r$ ,  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker y  $H_m^{(2)}(\cdot)$  es la función de Hankel de segunda especie y orden  $m$ .

### Formulación del problema

A partir de la configuración mostrada en la fig. 1, resulta conveniente dividir el dominio en dos regiones ( $R$  y  $E$ ), donde se establezcan las condiciones de frontera adecuadas para representar al problema. En la fig. 2 se muestran estas regiones, en donde  $\partial R = \partial_1 R \cup \partial_2 R \cup \partial_3 R$  para la región  $R$ , y  $\partial E = \partial_1 E \cup \partial_2 E$  para la región  $E$ .

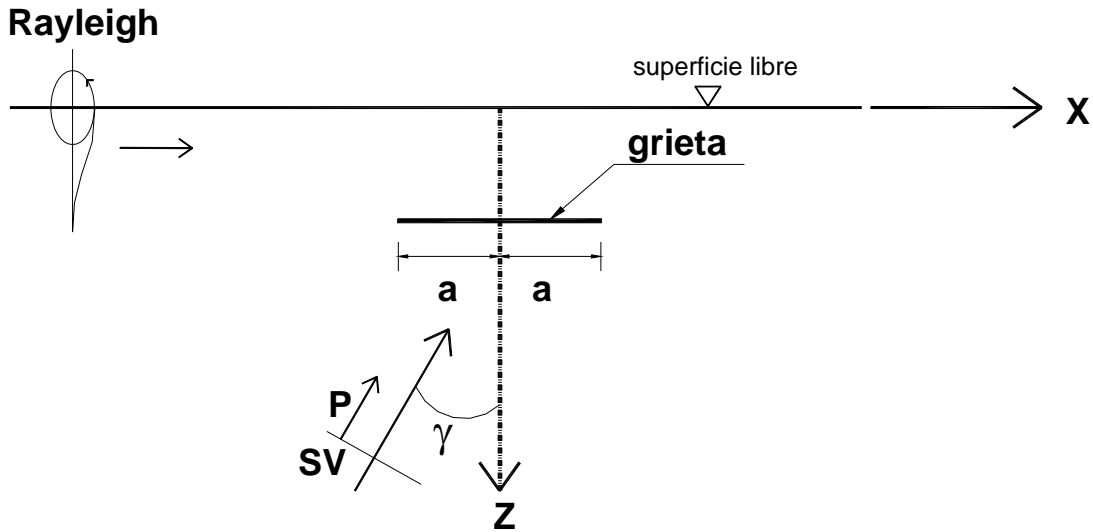


Figura 1. Semiespacio elástico que contiene una grieta ante la incidencia de ondas P, SV y Rayleigh.

De acuerdo con la fig. 2, en  $\partial_3 R$  (superficie libre) se tiene que las tracciones son nulas, por lo tanto éstas pueden escribirse como

$$t_i^R(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial_3 R. \quad (9)$$

En las regiones  $R$  y  $E$  de interfaz continua, o no agrietada, los desplazamientos y tracciones están dados por

$$u_i^R(\mathbf{x}) = u_i^E(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial_1 R = \partial_1 E, \quad (10)$$

$$t_i^R(\mathbf{x}) = t_i^E(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial_1 R = \partial_1 E. \quad (11)$$

En la discontinuidad o grieta las tracciones son nulas. En el caso de difracción múltiple (presencia de varias grietas) esta condición se mantiene simultáneamente para todas las grietas, y por lo tanto se tiene que:

$$t_i^E(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial_2 E, \quad (12)$$

$$t_i^R(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial_2 R. \quad (13)$$

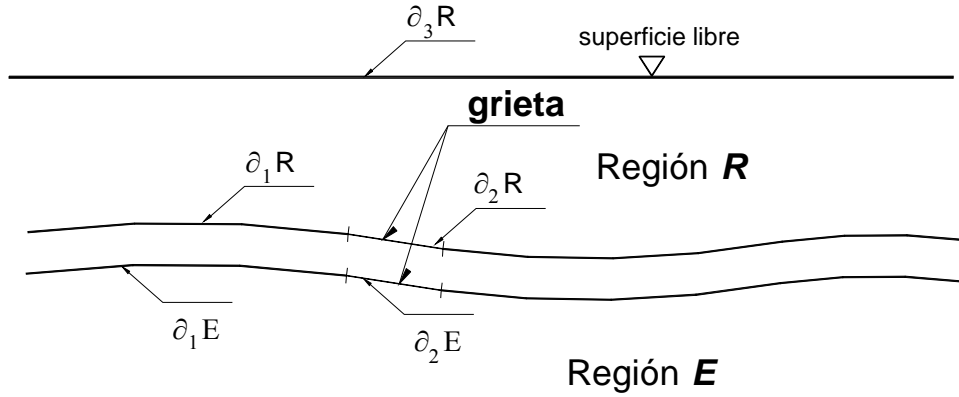


Figura 2. Configuración por regiones ( $R$  y  $E$ ).

Considerando las condiciones de frontera (ecs. 9 a 13) y los campos incidente, reflejado y difractado, se tiene

$$u_i^{dR}(\mathbf{x}) + u_i^{oR}(\mathbf{x}) = u_i^{dE}(\mathbf{x}) + u_i^{oE}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial_1 R = \partial_1 E, \quad (14)$$

$$t_i^{dR}(\mathbf{x}) + t_i^{oR}(\mathbf{x}) = t_i^{dE}(\mathbf{x}) + t_i^{oE}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial_1 R = \partial_1 E, \quad (15)$$

$$t_i^R(\mathbf{x}) = t_i^{oR}(\mathbf{x}) + t_i^{dR}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial_3 R, \quad (16)$$

$$t_i^E(\mathbf{x}) = t_i^{oE}(\mathbf{x}) + t_i^{dE}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial_2 E, \quad (17)$$

$$t_i^R(\mathbf{x}) = t_i^{oR}(\mathbf{x}) + t_i^{dR}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial_2 R, \quad (18)$$

donde

$t_i^{o*}(\mathbf{x})$  = tracciones de campo libre en la región  $R$ , sin considerar la presencia de la grieta,  $t_i^{d*}(\mathbf{x})$  = tracciones de campo difractado en la región  $R$ , producidos por la presencia de la grieta, y \* corresponde a las regiones  $E$  o  $R$ .

Sustituyendo las ecs. 1 y 2 en las ecuaciones 14 a 18 se tiene

$$\int_{\partial R} \phi_j^R(\xi) G_{ij}^R(\mathbf{x}; \xi) dS_\xi - \int_{\partial E} \phi_j^E(\xi) G_{ij}^E(\mathbf{x}; \xi) dS_\xi = u_i^{oE}(\mathbf{x}) - u_i^{oR}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial_1 R = \partial_1 E, \quad (19)$$

$$c\phi_i^R(\mathbf{x}) + \int_{\partial R} \phi_j^R(\xi) T_{ij}^R(\mathbf{x}; \xi) dS_\xi - c\phi_i^E(\mathbf{x}) - \int_{\partial E} \phi_j^E(\xi) T_{ij}^E(\mathbf{x}; \xi) dS_\xi = t_i^{oE}(\mathbf{x}) - t_i^{oR}(\mathbf{x}), \quad (20)$$

$$\mathbf{x} \in \partial_1 R = \partial_1 E,$$

$$c\phi_i^R(\mathbf{x}) + \int_{\partial R} \phi_j^R(\xi) T_{ij}^R(\mathbf{x}; \xi) dS_\xi = -t_i^{oR}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial_3 R, \quad (21)$$

$$c\phi_i^E(\mathbf{x}) + \int_{\partial E} \phi_j^E(\xi) T_{ij}^E(\mathbf{x}; \xi) dS_\xi = -t_i^{oE}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial_2 E, \quad (22)$$

$$c\phi_i^R(\mathbf{x}) + \int_{\partial R} \phi_j^R(\xi) T_{ij}^R(\mathbf{x}; \xi) dS_\xi = -t_i^{oR}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial_2 R. \quad (23)$$

### Esquema de discretización

Discretizando las fronteras de las regiones  $R$  y  $E$ , (fig. 3) y suponiendo  $\phi = \text{constante}$  sobre cada elemento, las ecs. 19 a 23 se pueden escribir como

$$\sum_{p=1}^{N+M+K} \phi_j^R(\xi_p) g_{ij}^R(\mathbf{x}_q; \xi_p) - \sum_{p=1}^{M+K} \phi_j^E(\xi_p) g_{ij}^E(\mathbf{x}_q; \xi_p) = 0, \quad q = 1, \dots, M, \quad (24)$$

$$\sum_{p=1}^{N+M+K} \phi_j^R(\xi_p) \cdot t_{ij}^R(\mathbf{x}_q; \xi_p) - \sum_{p=1}^{M+K} \phi_j^E(\xi_p) \cdot t_{ij}^E(\mathbf{x}_q; \xi_p) = 0, \quad q = 1, \dots, M, \quad (25)$$

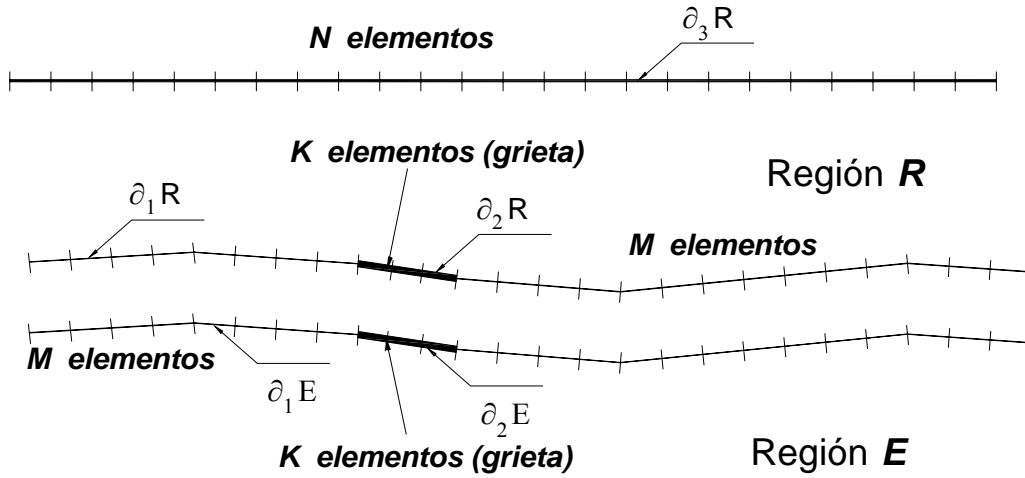


Figura 3. Esquema de discretización en la frontera de las regiones  $R$  y  $E$ .

$$\sum_{p=1}^{N+M+K} \phi_j^R(\xi_p) \cdot t_{ij}^R(\mathbf{x}_q; \xi_p) = -t_i^{oR}(\mathbf{x}_q), \quad q = 1, \dots, N, \quad (26)$$

$$\sum_{p=1}^{M+K} \phi_j^E(\xi_p) \cdot t_{ij}^E(\mathbf{x}_q; \xi_p) = -t_i^{oE}(\mathbf{x}_q), \quad q = 1, \dots, K, \quad (27)$$

$$\sum_{p=1}^{N+M+K} \phi_j^R(\xi_p) \cdot t_{ij}^R(\mathbf{x}_q; \xi_p) = -t_i^{oR}(\mathbf{x}_q), \quad q = 1, \dots, K. \quad (28)$$

Estas integrales son calculadas numéricamente, excepto cuando  $\mathbf{x} = \xi$  donde las integrales se anulan. En ese caso

$$t_{ij}^l(\mathbf{x}_q; \xi_p) = (\pm) \frac{1}{2} \delta_{ij}, \quad l = R, E, \quad (29)$$

las ecs. 24-28 representan el sistema de ecuaciones integrales a resolver.

## RESULTADOS NUMÉRICOS

Con el objeto de validar algunos de los resultados calculados con nuestro método, éstos son comparados con los obtenidos por Achenbach *et al.* (1983). Con el código MIEF son calculados los desplazamientos horizontales en el punto **A** localizado en la superficie libre (fig. 4). La grieta tiene una longitud total  $2a$  y se localiza a una profundidad  $d$  de la superficie libre. Achenbach *et*

al. utilizaron una incidencia normal de ondas P y SV generadas en la superficie libre y que viajan hacia el interior del semiespacio.

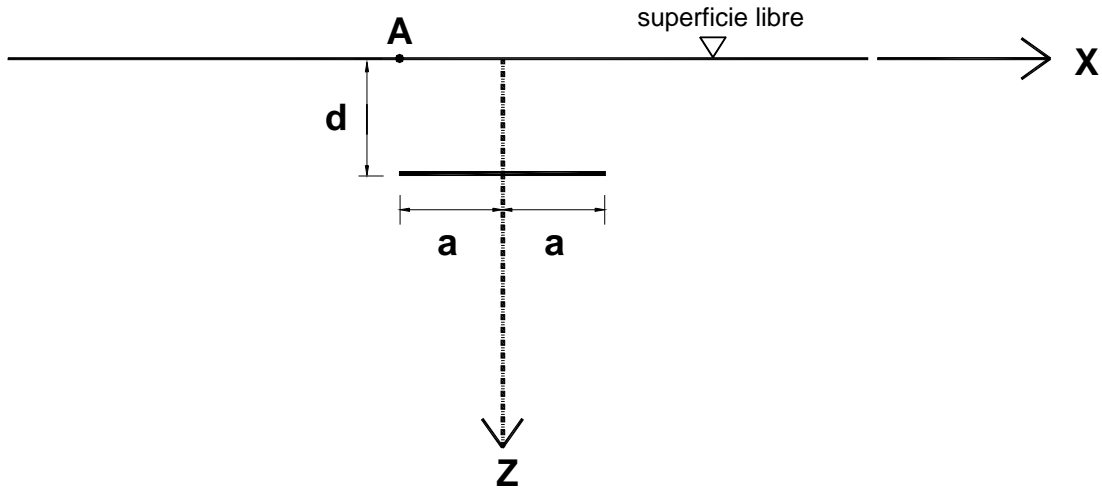


Figura 4. Problema seleccionado para validación, estudiado originalmente por Achenbach *et al.* (1983).

En nuestro modelo se emplearon las mismas propiedades elásticas y características geométricas del modelo utilizado por Achenbach *et al.* (1983). Con el propósito de validar el modelo aquí propuesto, se consideraron diferentes relaciones  $d/2a$ . Los resultados de los desplazamientos horizontales adimensionales  $U_L$  se graficaron *versus* la frecuencia adimensional  $\omega d/C_R$  donde  $C_R$  = velocidad de ondas de Rayleigh. Se empleó una relación de Poisson  $\nu=0.3$ ,  $d/2a=0.2, 0.4, 0.6$  y  $1.0$  y un rango de frecuencia adimensional definida en  $0 \leq \omega d/C_R \leq 3.0$ . Los desplazamientos adimensionales en la superficie libre se determinaron por

$$U_L = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{d}{b} \frac{1}{(k_L d) \text{sen}(k_L d)} \left| \frac{u_{xs}}{F} \right|, \quad (30)$$

$u_{xs}$  es el desplazamiento en frecuencia obtenido para incidencia de ondas P generado en el interior del medio,  $b = 2a$ ,  $k_L = \omega/\alpha$  = número de onda y  $F$  = factor que depende de la relación  $d/2a$  considerada. La expresión anterior fue desarrollada por Achenbach *et al.* (1983).

En la fig. 5 se presentan los desplazamientos adimensionales medidos en el punto A para  $d/2a = 0.2, 0.4, 0.6$  y  $1.0$ . Las curvas muestran diferentes ordenadas espectrales máximas (picos espectrales), asociados a resonancias del estrato aparente ubicado entre la cara superior de la grieta y la superficie libre. Esta frecuencia de resonancia corresponde a su frecuencia fundamental. Para  $d/2a=0.2$  se observa que la ordenada espectral máxima se presenta a frecuencias menores que para las otras relaciones de  $d/2a$  estudiadas. Esto se debe a la poca profundidad de este estrato con respecto a los otros casos.

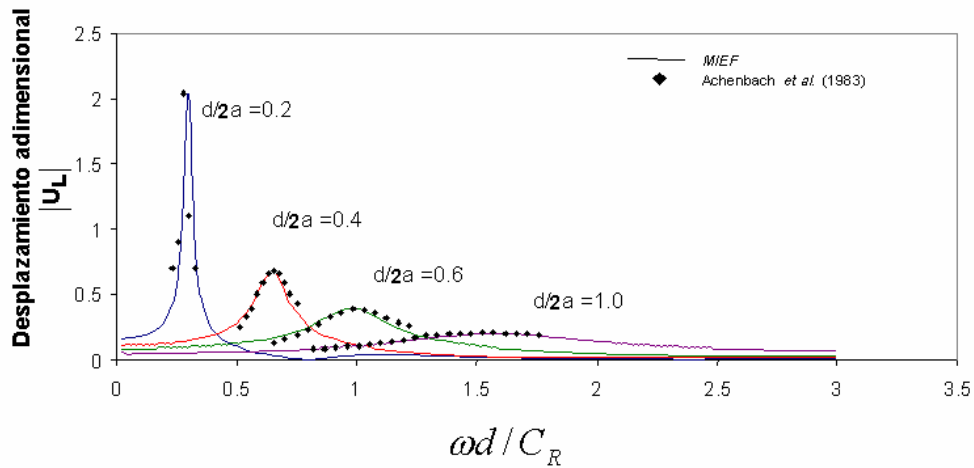


Figura 5. Desplazamientos adimensionales  $U_L$  para el modelo de la fig. 4, las curvas con línea continua son resultados del presente estudio, los rombos los de Achenbach *et al.* (1983).

A medida que incrementa la relación  $d/2a$  (p. ej.  $d/2a = 1.0$ ) las curvas de los máximos se tornan menos agudas y por lo tanto es más difícil determinar su frecuencia de resonancia  $\tilde{\omega}$ . Se observa que ambas soluciones concuerdan satisfactoriamente para todas las relaciones  $d/2a$ . En la fig. 6 se grafican las frecuencias de resonancia *versus* las relaciones  $d/2a$ . Aquí igual que en la fig. 5 los resultados obtenidos tienen un excelente acuerdo con los calculados por Achenbach *et al.* (1983).

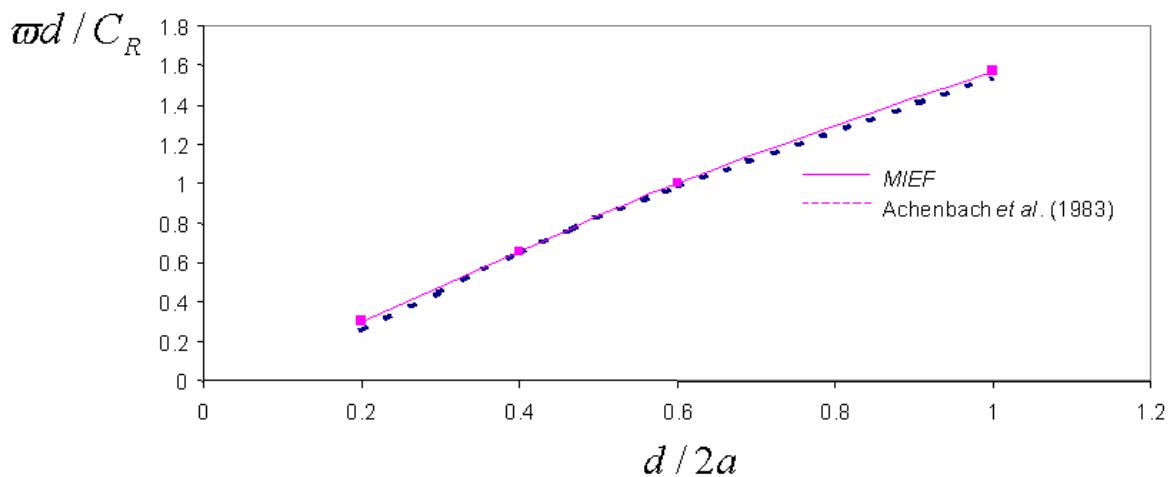


Figura 6. Curva que relaciona la frecuencia de resonancia  $\tilde{\omega}d/C_R$  y  $d/2a$ . La línea continua representa los resultados del presente estudio, la línea punteada los de Achenbach *et al.* (1983).

Empleando el código MIEF se obtuvieron desplazamientos adimensionales  $U_L$  para receptores en la superficie libre, cara superior e inferior de la grieta, para la frecuencia adimensional  $\omega d / C_R = 0.30468$  (fig. 7), correspondientes al punto donde se localiza el desplazamiento espectral máximo de la fig. 5. Se observa que a esta frecuencia se tienen seis puntos en los cuales se presentan los mayores desplazamientos. Dos de ellos están ubicados sobre la superficie libre, otros dos sobre la cara superior de la grieta y los restantes sobre la parte inferior de ésta. Los resultados son simétricos con respecto al eje  $x$ , debido a la geometría de la grieta e incidencia vertical de la onda P. Puede observarse que los mayores desplazamientos ocurren en la superficie libre y a distancias  $x$  menores de  $a$ , los cuales varían según la frecuencia que se analice.

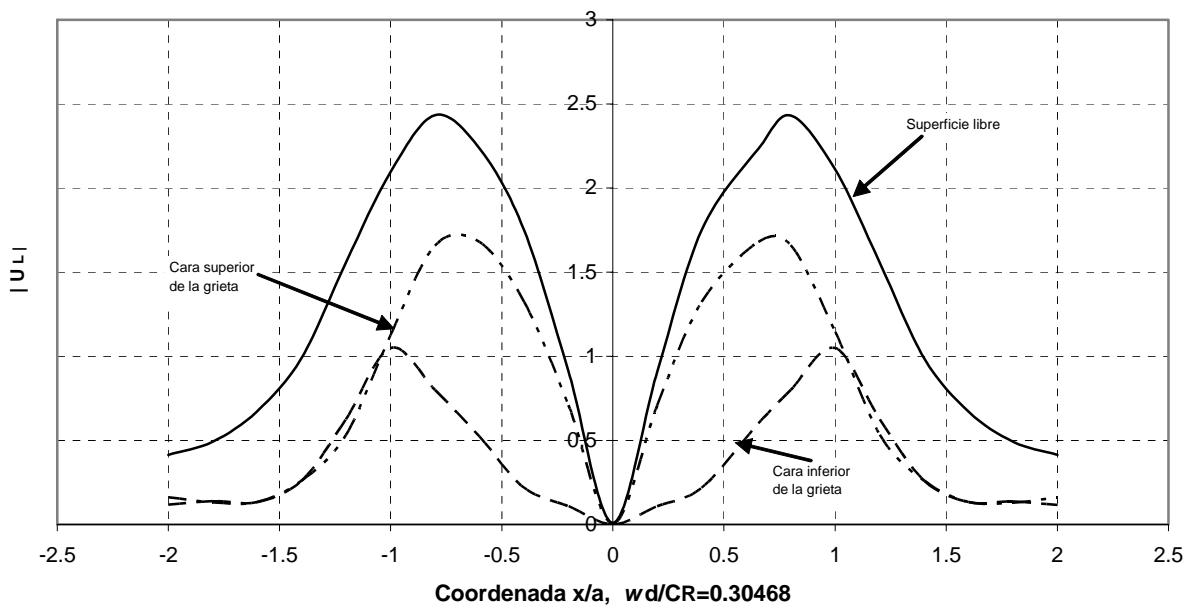


Figura 7. Desplazamiento horizontal  $U_L$  en la superficie libre, cara superior e inferior de la grieta para la frecuencia adimensional  $\omega d / C_R = 0.30468$ .

Para ilustrar la aplicación del MIEF a problemas de propagación de ondas elásticas en medios que contienen grietas, se analizaron varios casos. En cada uno de ellos se obtienen sismogramas sintéticos para los desplazamientos horizontales  $u$  en dirección  $x$  y verticales  $w$  en dirección  $z$ . Estos sismogramas se obtienen en el dominio del tiempo mediante el empleo de la transformada discreta de Fourier. Finalmente, se calcularon los sismogramas sintéticos que ilustran el fenómeno de reflexión y difracción múltiple debido a la incidencia de ondas de Rayleigh en un medio con varias grietas.

Los casos estudiados en la fig. 8 corresponden a relaciones de  $d/2a = 0.2$  y  $0.4$  con ángulos de incidencia de ondas P y SV de  $\gamma = 0^\circ$  y  $30^\circ$ . La velocidad de propagación de ondas S considerada es  $\beta = 1$  cm/seg y la relación de Poisson es  $\nu = 0.3$ . Los sismogramas sintéticos se

calcularon a partir de los resultados en el dominio de la frecuencia para 41 receptores ubicados en la superficie libre. Se empleó como excitación temporal un pulso Ricker con un periodo característico  $t_p = 1.0$  seg.

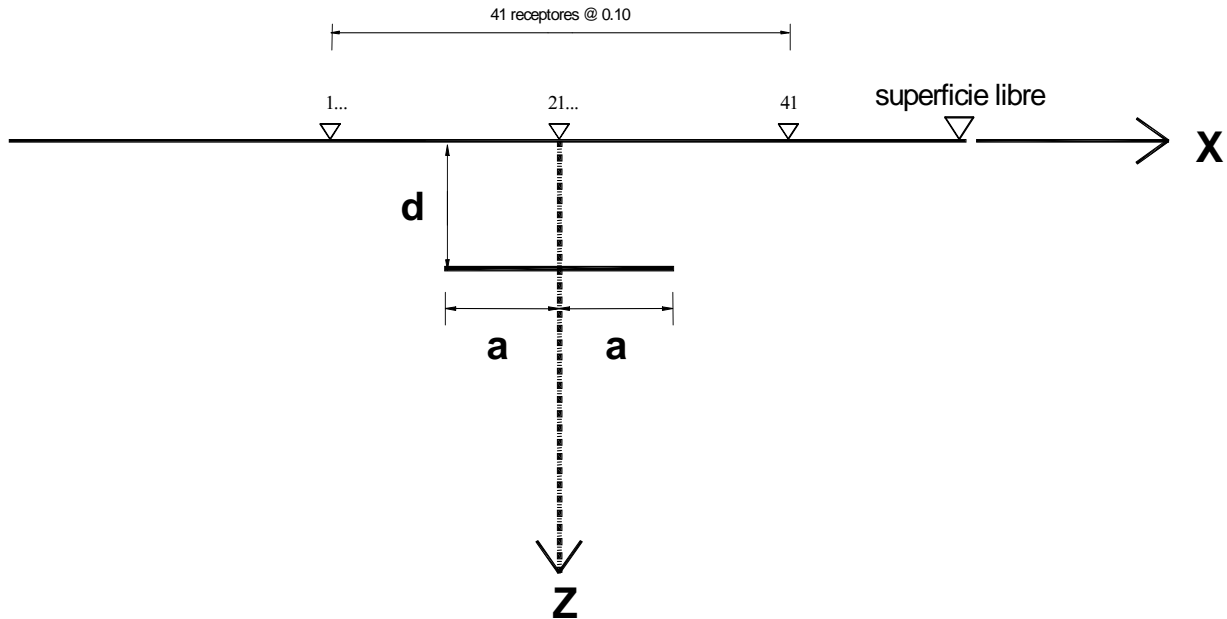


Figura 8. Modelo considerado para la construcción de sismogramas sintéticos.

De la fig. 9 a la fig. 12 se muestran los desplazamientos verticales  $w$  y horizontales  $u$  para relaciones  $d/2a = 0.2$  y  $0.4$  (izquierda y derecha respectivamente). La fig. 9 corresponde a incidencia vertical de ondas P. Puede apreciarse que para los receptores alejados de la zona de la grieta los desplazamientos verticales son mayores que para aquellos que se encuentran en la zona de ésta. Esto se debe a que la grieta actúa como una barrera, ocasionando que la onda incidente sea dispersada y que las amplitudes de los desplazamientos disminuyan considerablemente (cerca de un 50% de la onda incidente). Este efecto también se observa en el caso de incidencia oblicua de ondas P con  $\gamma = 30^\circ$  (fig. 10). Para la componente horizontal es notable la aparición de patrones sucesivos de ondas difractadas generadas a partir de la grieta. Por simetría en la fig. 9 son fácilmente identificables, en tanto que en la fig. 10 estos patrones de difracción no aparecen con la misma definición.

En la fig. 11 se presentan los resultados obtenidos para incidencia vertical de ondas SV. Se aprecia que las amplitudes de la onda difractada en la componente horizontal son mayores en el caso de la relación  $d/2a = 0.4$ . Para esta misma componente las máximas amplitudes ocurren fuera de la zona de la grieta. Es notable que la perturbación generada por la grieta es más prolongada para  $d/2a = 0.4$  en ambas componentes. Ahora, en los sismogramas de la componente vertical una vez más son fácilmente identificables los patrones de difracción de las ondas generadas por la grieta en ambos casos.

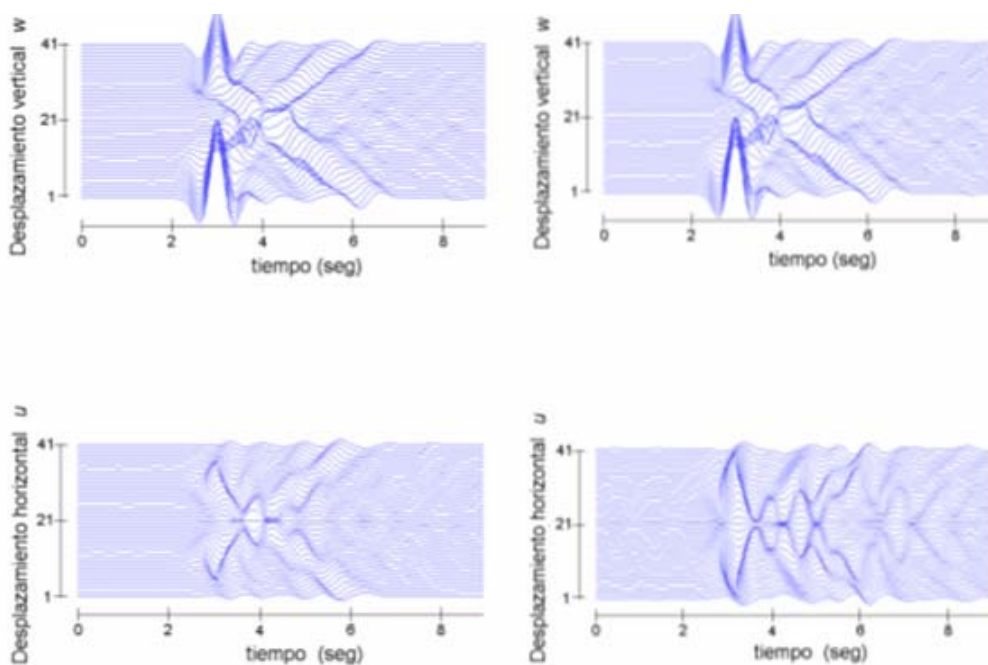


Figura. 9 Sismogramas sintéticos para el modelo de la fig. 8, para las relaciones de profundidad  $d/2a = 0.2$  y  $0.4$  (lado izquierdo y derecho respectivamente), incidencia normal de ondas P.

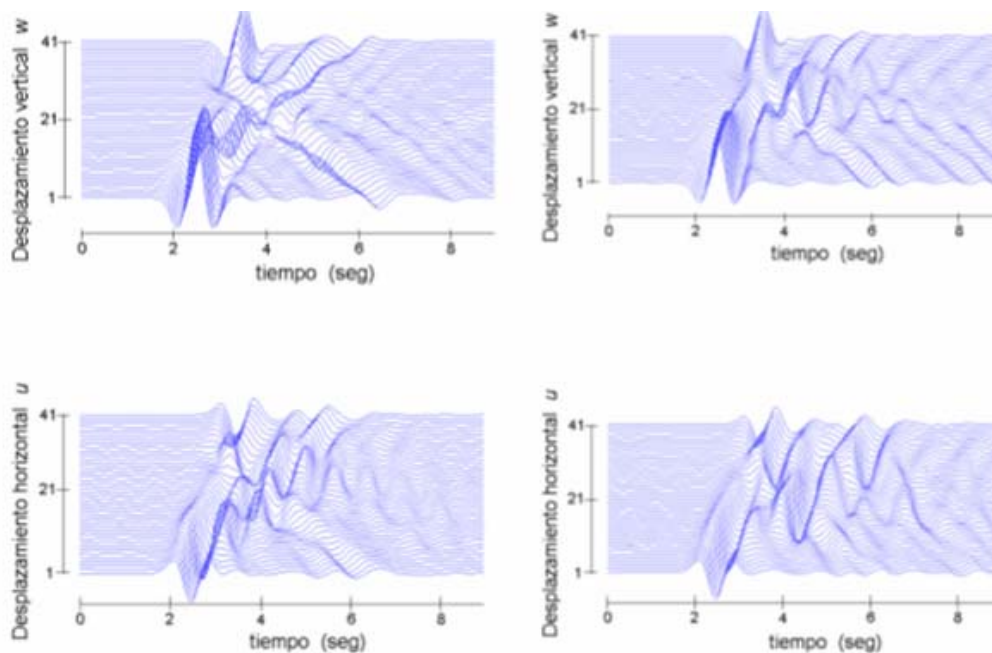


Figura. 10 Sismogramas sintéticos para el modelo de la fig. 8, para las relaciones de profundidad  $d/2a = 0.2$  y  $0.4$  (lado izquierdo y derecho respectivamente), incidencia oblicua de ondas P.

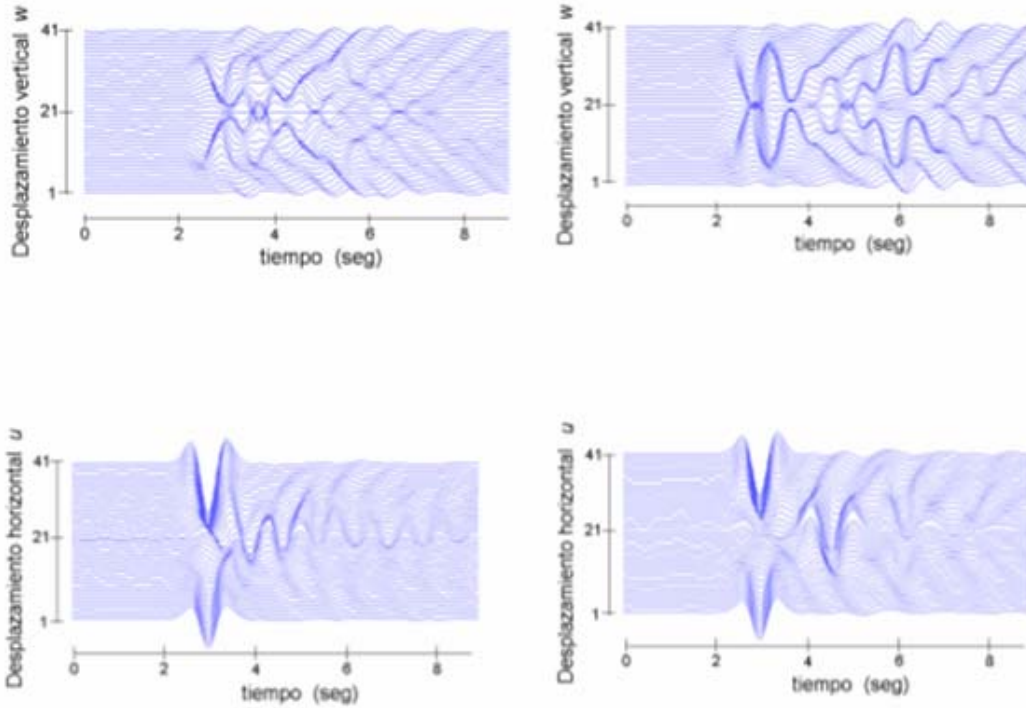


Figura. 11. Sismogramas sintéticos para el modelo de la fig. 8, para las relaciones de profundidad  $d/2a = 0.2$  y  $0.4$  (lado izquierdo y derecho respectivamente), incidencia normal de ondas S.

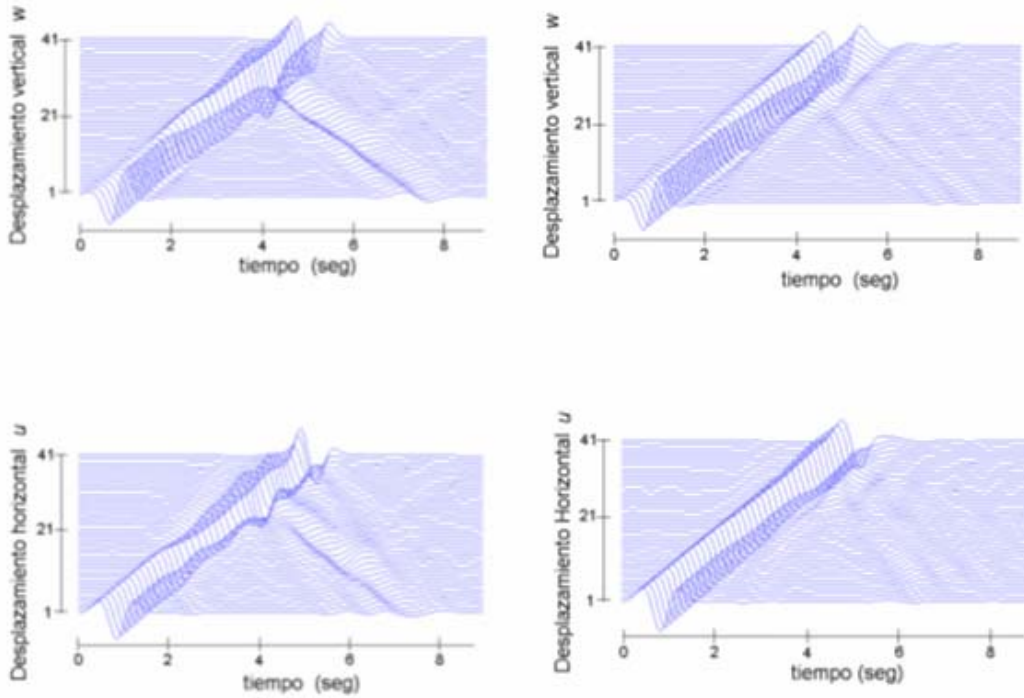


Figura. 12. Desplazamientos verticales y horizontales calculados en la superficie libre para el problema de la fig.8. Incidencia de ondas de Rayleigh.

Los resultados para la incidencia de ondas de Rayleigh se ilustran en la fig. 12. Para grietas someras ( $d/2a = 0.2$ ) la interacción de ésta con la superficie libre provoca una reflexión de ondas muy marcada, la cual es registrada por la línea de receptores localizados antes de la primera punta de la grieta. La velocidad con que esta onda se desplaza en la superficie libre (tanto la incidente como la reflejada) corresponde a la velocidad característica de las ondas de Rayleigh (0.92cm/seg para la relación de Poisson considerada). Así también se aprecia una disminución de las amplitudes  $w$  en  $|x| \leq a$ . Para  $d/2a = 0.4$  la reflexión casi no se aprecia. Estos se debe a que la grieta es mas profunda y la onda de Rayleigh no alcanza a ser afectada, debido al decaimiento exponencial de los desplazamientos  $w$  y  $u$  con respecto a la profundidad. En estos dos casos, existe difracción de ondas hacia el interior del dominio estudiado, sin embargo, ésta es mayor para la grieta mas superficial ( $d/2a = 0.2$ ). A medida que la grieta se localiza a mayores profundidades, cercanas o mayores a una longitud de la onda de Rayleigh, la difracción de tales ondas es nula.

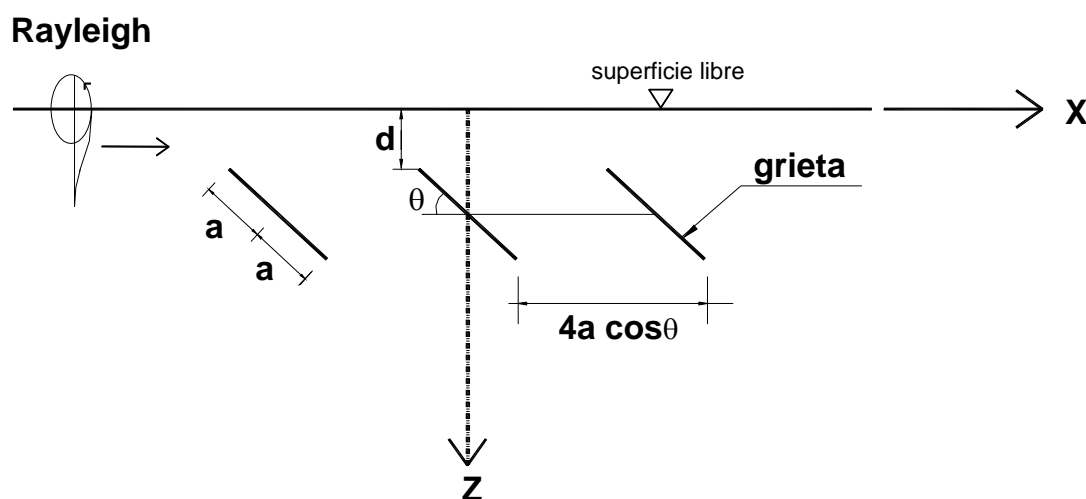


Figura 13. Modelo de 3 grietas en un semiespacio elástico para el caso de incidencia de onda de Rayleigh.

Finalmente en la fig. 13 se muestra un modelo que presenta a una onda de Rayleigh que incide en un medio con 3 grietas. El primer caso estudiado, caso a), corresponde a 3 grietas horizontales ( $\theta = 0^\circ$ ) localizadas a una profundidad  $d/2a = 0.2$ , mientras que el caso b) corresponde a estas 3 grietas con  $\theta = 60^\circ$  y una profundidad  $d/2a = 0.1$ . Los resultados para los desplazamientos verticales son presentados en la fig. 14. Los cálculos fueron realizados para 51 receptores ubicados sobre la superficie libre igualmente espaciados a 0.24. De manera general para los casos estudiados se presenta una disminución considerable en la amplitud de la onda, la cual claramente se observa en el receptor 51, en comparación con el receptor 1. Sin embargo, para  $\theta = 0^\circ$  existe una mayor interacción de la onda incidente con las grietas. Ahí se observa que la difracción generada por cada grieta da como resultado en una onda de Rayleigh reflejada, moviéndose a su velocidad característica pero en dirección contraria a la onda incidente. Esta onda de Rayleigh reflejada es muy notoria para las primeras dos grietas, sin embargo, para la tercera es casi nula, debido a que para ésta la amplitud de la onda incidente ya ha sido reducida

por la interacción con las grietas anteriores (teniendo ahora menos influencia a la profundidad de la grieta). Por mediciones tomadas directamente de los sismogramas mostrados en esta figura (fig. 14), se observa que la onda de Rayleigh reflejada es generada en el vértice opuesto de la grieta donde incide la onda. Por otro lado, para  $\theta = 60^\circ$  la reflexión de ondas de Rayleigh casi no se aprecia. Esto se debe a que la inclinación de la grieta ayuda a disipar la energía hacia el interior del medio y no hacia la superficie libre. La onda que incide sobre la primera grieta es reducida en amplitud, la cuál al incidir sucesivamente en las siguientes grietas prácticamente no se ve afectada.

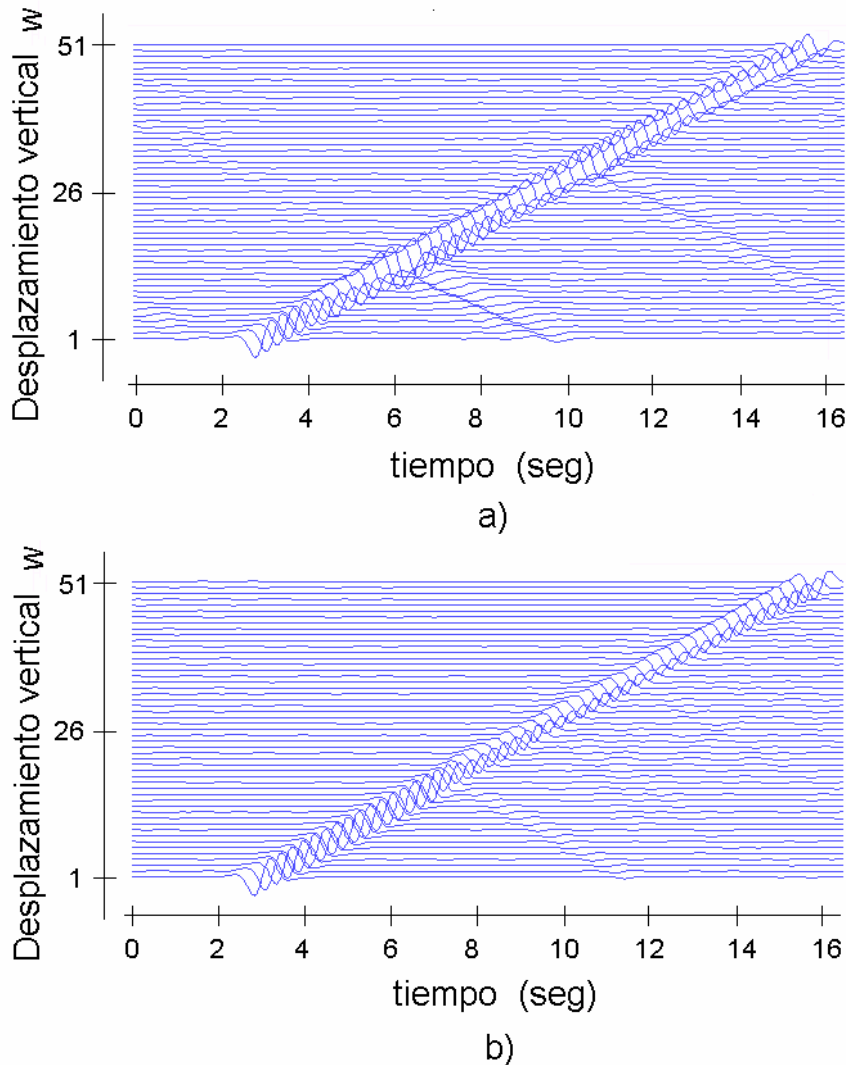


Figura. 14. Sismogramas sintéticos. Desplazamientos verticales (modelo de la fig.13). Incidencia de onda de Rayleigh. a) tres grietas horizontales, b) tres grietas inclinadas  $\theta = 60^\circ$ .

## CONCLUSIONES

En el presente trabajo se mostró la aplicación del método indirecto de elementos frontera MIEF para calcular la respuesta sísmica y difracción de un medio que contiene una o varias grietas bajo la incidencia de ondas P, SV y Rayleigh. Esta técnica numérica se basa en una representación integral del campo difractado y puede ser vista como una realización numérica del principio de Huygens, dado que las ondas difractadas son construidas por medio del campo creado por una serie de fuentes puntuales localizadas en la frontera. Este método se validó comparando los resultados con los obtenidos por Achenbach *et al.* (1983) para el caso de incidencia de ondas P. También se efectuó el análisis en el dominio del tiempo para el caso de incidencia de ondas P, SV y Rayleigh. Las ordenadas máximas obtenidas en la respuesta aparecen en las frecuencias que coinciden con la frecuencia fundamental de un estrato aparente contenido entre la cara superior de la grieta y la superficie libre del modelo estudiado. Se ha observado que para el análisis en el dominio del tiempo y para incidencias de ondas P y SV, la grieta actúa como una barrera, ocasionando reflexiones hacia el interior del medio y que las amplitudes medidas en la superficie libre, detrás de la grieta, sean afectadas solamente por ondas difractadas por ella. En el caso de ondas de Rayleigh la profundidad y orientación de las grietas es un factor muy importante en la reducción de las amplitudes de la onda incidente. Mediante la colocación de receptores en superficie libre se observa que para grietas paralelas a ésta se presentan ondas reflejadas generadas en el extremo opuesto de la grieta de donde incide la onda de Rayleigh. Estas reflexiones, al ir atravesando el modelo, cada vez son más pequeñas. Para grietas inclinadas, dichas reflexiones pueden favorecer a la disminución de las amplitudes de los desplazamientos en la superficie libre, dado que existe una fuerte difracción de ondas hacia el interior del medio.

## AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a M. Suárez por la lectura crítica de este manuscrito y sus comentarios. A U. Iturrarán-Viveros y R. Vai, sus trabajos proporcionaron ideas para la formulación del modelo aquí presentado. Parte de los cálculos fueron realizados en el Instituto de Ingeniería de la UNAM, coordinación de Ingeniería Sismológica. Este trabajo estuvo auspiciado por el Instituto Mexicano del Petróleo (Dirección Ejecutiva de Ingeniería y La Competencia de Exploración) y por CONACYT, proyecto (NC-204); México.

## REFERENCIAS

- Achenbach, J D, W Lin y L M Keer (1983), "Surface waves due to scattering by a near-surface parallel crack", *IEEE trans. Sonics and Ultrasonics*, Vol. SU-30, pp. 270-276.
- Baker, B R (1962), "Dynamic stresses created by a moving crack", *Journal of Applied Mechanics*, Transactions ASME, Vol. 29, pp. 449-458.
- Broberg, K B (1960), "The propagation of a brittle crack", *Artkiv for Fysik*, Vol. 18, pp. 159-192.

- Chen, Y M (1975), "Numerical computation of dynamic stress intensity factor by a Lagrangian Finite-Difference Method (the HEMP Code)", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol 7, pp. 653-660.
- Craggs, J W (1960), "On the propagation of a crack in an elastic-brittle material", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 8, pp. 66-75.
- Frangi, A (1998), "Some developments in the symmetric Galerkin Boundary Element Method", *Tesis de Doctorado*, Politecnico de Milano.
- Freund, L B (1972), "Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading-III . Stress Wave loading", *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 21, pp. 47-61.
- Griffith, A A (1921), "The phenomena of rupture and flow in solids", *Philosophical Transactions of Royal Society of London*, Vol. A221, pp. 163-197.
- Irwin, G R (1948), "Fracture Dynamics", *Fracturing of Metal*, American Society for Metals, Cleveland, pp. 147-166.
- Irwin, G R (1957), "Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 24, pp. 361-364.
- Kanninen, M F (1978), "A critical appraisal of solution techniques in dynamic fracture mechanics", *Numerical Methods in Fracture Mechanics*, pp. 612-634.
- Kupradze, V D (1963), *Dynamical problems in elasticity*, In *Progress in Solid Mechanics*, I. N. Sneddon y R. Hill (Editores), North-Holland, Amsterdam. Vol. III.
- Luzón, F, F J Sánchez-Sesma, J L Rodríguez-Zuñiga, A M Posadas, J M García, J Martín, M D Romacho y M Navarro (1997), "Diffraction of P, SV and Rayleigh waves by three-dimensional topographies", *Geophys. Int. Journal*, Vol. 129, pp. 571-578.
- Mott, N F (1948), "Fracture of metals: Theoretical considerations", *Engineering*, Vol. 165, pp. 16-18.
- Orowan, E (1948), "Fracture and strength of solids", *Reports on Progress in Physics*, Vol. XII, p. 185.
- Roberts, D K y A A Wells (1954), "The velocity of brittle fracture", *Engineering*, Vol. 178, pp. 820-821.
- Rodríguez-Castellanos, A., L H Hernández, F J Sánchez-Sesma y G Urriolagoitia (1999), "Evaluación del factor de intensidad de esfuerzos bajo condiciones de carga dinámica", *International Materials Research Congreso*, Cancún, México, agosto.
- Sánchez-Sesma, F J y M Campillo (1991), "Diffraction of P, SV and Rayleigh waves by topographic features; a boundary integral formulation", *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 81, No. 6, pp. 1-20.
- Sánchez-Sesma, F J, J Ramos-Martínez, y M Campillo (1993), "An indirect boundary element methods applied to simulate the seismic response of alluvial valleys for incident P, SV and Rayleigh waves", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 22, pp. 279-295.

Sánchez-Sesma, F J y F Luzón (1995), “Seismic response of three-dimensional alluvial valleys for incident P, SV and Rayleigh waves”, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 85, No. 1, pp. 269-284.

Stroh, A N (1957), “A Theory of the fracture of metals”, *Advances in Physics*, Vol. 6, pp. 418-465.

Timoshenko, S (1963), *Strength of materials, Part I Elementary theory and problems*, tercera edición, D. Van Nostrand Company Inc, New York.

Vai, R, J M Castillo-Covarrubias, F J Sánchez-Sesma, D Komatitsch, y J P Vilotte.(1999), “Elastic wave propagation in an irregularly layered medium”, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 18, pp. 11-18.

Yoffé, E H (1951), “The moving Griffith crack”, *Philosophical Magazine*, Vol. 42, pp. 739-750.