

## CRITERIO DE LINEALIZACIÓN EQUIVALENTE NO GAUSSIANA PARA EL ANÁLISIS DE SISTEMAS HISTERÉTICOS SUJETOS A SISMOS MODELADOS COMO PROCESOS ALEATORIOS<sup>❖</sup>

Francisco L. Silva González<sup>(1)</sup> y Sonia E. Ruiz Gómez<sup>(2)</sup>

### RESUMEN

Debido al comportamiento no lineal que exhibe la mayoría de las estructuras sometidas a temblores intensos es conveniente contar con métodos de análisis de sistemas no lineales excitados aleatoriamente. El objetivo general del trabajo es proponer y calibrar una herramienta eficaz y versátil para estimar la respuesta estocástica de sistemas estructurales no lineales histeréticos sujetos a excitaciones sísmicas aleatorias. Se propone un criterio de linealización equivalente estocástica que consiste en reemplazar el conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales que gobiernan el comportamiento del sistema estructural por un conjunto equivalente de ecuaciones diferenciales lineales. A diferencia de otros criterios de linealización, el propuesto toma en cuenta la naturaleza no gaussiana de la respuesta. Se propone un modelo que representa adecuadamente la evolución de la función de densidad de probabilidad de la respuesta obtenida con simulación de Monte Carlo. Con dicho modelo se calculan los coeficientes linealizadores no gaussianos definidos por expresiones analíticas. El método propuesto se calibra con resultados de simulación de Monte Carlo y se compara con dos técnicas de linealización estocástica propuestas en la literatura. El criterio que aquí se propone es razonablemente preciso y proporciona mejores resultados que las técnicas de linealización antes mencionadas.

### ABSTRACT

Due to the non-linear behavior that presents most of structures under intense earthquakes, it is convenient to propose methods for the analysis of nonlinear systems subject to random loads. The general objective of this work is to propose and to calibrate an effective and versatile tool to estimate the stochastic response of hysteretic non-linear structural systems subject to earthquakes. It is proposed a stochastic equivalent linearization approach that consists in replacing the set of non-linear differential equations that govern the behavior of structural system by an equivalent set of linear differential equations. Contrary to other linearization approaches, this approach considers the non-Gaussian characteristics of the response. It uses a model that represents appropriately the evolution of the probability density function of response obtained with Monte Carlo simulation.

---

❖ Artículo derivado de la tesis ganadora del *Tercer Concurso Nacional de Tesis de Doctorado* organizado por la Sociedad Mexicana de Ingeniería Sísmica. Recibido el 26 de septiembre de 2005 y aprobado para su publicación el 25 de octubre de 2005. Se aceptarán comentarios y/o discusiones hasta cinco meses después de su publicación.

- (1) Coordinación de Estrategias Tecnológicas en Aguas Profundas, Instituto Mexicano del Petróleo, Eje Central Lázaro Cárdenas No.152, Col. San Bartolo Atepehuacan, 07730 México, D.F., [fsilva@imp.mx](mailto:fsilva@imp.mx)
- (2) Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México. Circuito Interior, Ciudad Universitaria, Del. Coyoacán, 04510 México, D.F. [srug@pumas.iingen.unam.mx](mailto:srug@pumas.iingen.unam.mx)

With that model the non-Gaussian linearization coefficients are calculated and defined by means of closed expressions. The method is calibrated with results of Monte Carlo simulation, and it is compared with other two stochastic linearization techniques. It was found that the approach gives place to results that have better approximation than the linearization techniques mentioned previously.

## INTRODUCCIÓN

Con el fin de obtener diseños más racionales, en algunas áreas de la ingeniería tales como en las que se analizan las estructuras bajo excitaciones estocásticas (por ejemplo, los temblores) se requiere realizar análisis no lineales de sistemas de múltiples grados de libertad bajo excitaciones no estacionarias. El método de linealización equivalente estocástica es uno de los métodos más populares dentro de todos los métodos aproximados para el análisis dinámico estocástico de sistemas no lineales. Este método ha demostrado ser una técnica versátil y computacionalmente eficiente, particularmente en aplicaciones prácticas. El método recibió un mayor impulso cuando Atalik y Utku (1976) mostraron que para respuestas gaussianas el cálculo de los coeficientes linealizadores se realizaba de una forma mucho más simple que para otro tipo de respuestas. Sin embargo, se ha encontrado una deficiencia importante del método cuando se considera que la respuesta es gaussiana, por ejemplo se produce una subestimación de la desviación estándar del desplazamiento del orden de 45% (Silva y Ruiz, 2000) con la consecuencia de que la predicción de las probabilidades de falla se desvían mucho de los resultados de la simulación, especialmente para demandas de ductilidad altas. Esto se debe al hecho de que el comportamiento gaussiano se supone para todas las variables, mientras que en realidad la fuerza restauradora está obligada a caer en una región finita lo que implica que su densidad de probabilidad es no gaussiana.

Como consecuencia, se han hecho varios intentos en los últimos años para superar este problema. Destacan los trabajos de Pradlwarter y Schüeller (1991), Schüeller *et al.* (1994), Kimura *et al.* (1994) y Hurtado (1998).

En este trabajo se muestra un criterio de linealización equivalente no gaussiana propuesto por el primer autor, el cual predice con aproximación razonable la covarianza máxima de la respuesta de un sistema histerético sujeto a un proceso aleatorio de excitación (Silva, 2002). El criterio se ha desarrollado para sistemas de múltiples grados de libertad, sin embargo en este artículo solamente se presenta la aplicación para el análisis de sistemas de un grado de libertad.

## ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

La ecuación de movimiento del sistema histerético de un grado de libertad estudiado en este trabajo es:

$$x + 2\xi\omega x + \alpha_2\omega^2 x + (1 - \alpha_2)\omega^2 z = -a(t) \quad (1)$$

$\ddot{x}$ ,  $\dot{x}$  y  $x$  son la aceleración, la velocidad y el desplazamiento de la masa;  $\xi = c/2m\omega$  es la fracción de amortiguamiento crítico viscoso;  $\omega = \sqrt{k/m}$  es la frecuencia circular de vibración del sistema;  $m$  es la masa;  $c$  es el coeficiente de amortiguamiento viscoso;  $k$  es la rigidez inicial;  $\alpha_2$  es la razón entre la rigidez de postfluencia y la rigidez inicial;  $t$  es el tiempo y  $a(t)$  la aceleración del terreno.  $z$  es la parte hysterética del desplazamiento, la cual en este trabajo se representa por el modelo de Bouc-Wen definido por la siguiente ecuación diferencial no lineal (Wen, 1980):

$$\dot{z} = h(\dot{x}, z) = A\dot{x} - \beta z |\dot{x}| |z|^{n-1} - \gamma \dot{x} |z|^n \quad (2)$$

$A$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $n$  son parámetros que definen el tamaño y la forma de los ciclos hysteréticos. Este modelo puede representar una gran variedad de formas de ciclos de histéresis (Wen, 1980).

### MODELO ESTOCÁSTICO DE LA EXCITACIÓN SÍSMICA

La excitación sísmica se modela como un proceso aleatorio no estacionario generado a partir de un ruido blanco filtrado modulado en amplitud. Se usa la función de transferencia de Clough y Penzien (1975), por lo que el modelo para la densidad espectral de la excitación sísmica es:

$$S_{CP}(\omega) = \left( \frac{\omega_g^4 + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega^2} \right) \left( \frac{\omega^4}{(\omega_f^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_f^2 \omega_f^2 \omega^2} \right) S_0 \quad (3)$$

La función moduladora es la propuesta por Yeh y Wen (1989):

$$c^2(t) = a \frac{t^b}{d + t^e} e^{-ct} \quad (4)$$

La intensidad del ruido blanco ( $S_0$ ) y los parámetros del filtro ( $\omega_g$ ,  $\xi_g$ ,  $\omega_f$  y  $\xi_f$ ) se determinan con un ajuste no lineal de la densidad espectral de potencia estimada con el espectro de Fourier de un acelerograma representativo del proceso de excitación. Los parámetros de la función moduladora ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , y  $e$ ) se determinan con un ajuste no lineal de la curva de intensidad de Arias del acelerograma representativo del proceso de excitación (Silva, 1998).

En este trabajo el proceso de excitación es modulado solamente en amplitud. Para estudiar el efecto de la modulación en frecuencia en la respuesta de sistemas no lineales consúltese Silva *et al.* (2001).

## MODELO PARA LA FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE LA RESPUESTA

A partir del análisis de la respuesta de sistemas histeréticos con demandas de ductilidad altas calculada mediante simulaciones de Monte Carlo (figs. 1 a 3), se observa que es razonable suponer que el desplazamiento y la velocidad pueden estar normalmente distribuidas, sin embargo, ésto no puede aplicarse a la parte histerética del desplazamiento ni por lo tanto a la fuerza restauradora. Estas cantidades están obligadas a caer en una región finita.

Se observa en la fig. 3 que, a medida en que la intensidad de la excitación aumenta y la demanda de ductilidad crece, la densidad de probabilidad de  $z$  adquiere una forma bimodal totalmente distinta a la forma gaussiana. Además dicha función está acotada dentro del intervalo  $-z_u \leq z \leq z_u$ , donde  $z_u$  es el valor máximo de  $z$ , dado por la expresión (Silva, 1998):

$$z_u = \left( \frac{A}{\beta + \gamma} \right)^{1/n} \quad (5)$$

La concentración de valores de la variable  $z$  en la vecindad de su valor máximo  $z_u$  y la forma que adopta dicha función de densidad de probabilidad sugieren el uso del siguiente modelo (Silva, 2002):

$$f_z(z) = {}_a\varphi_z(z)(1-2p) + {}_b\varphi_z(z-z_z)p + {}_b\varphi_z(z+z_z)p \quad (6)$$

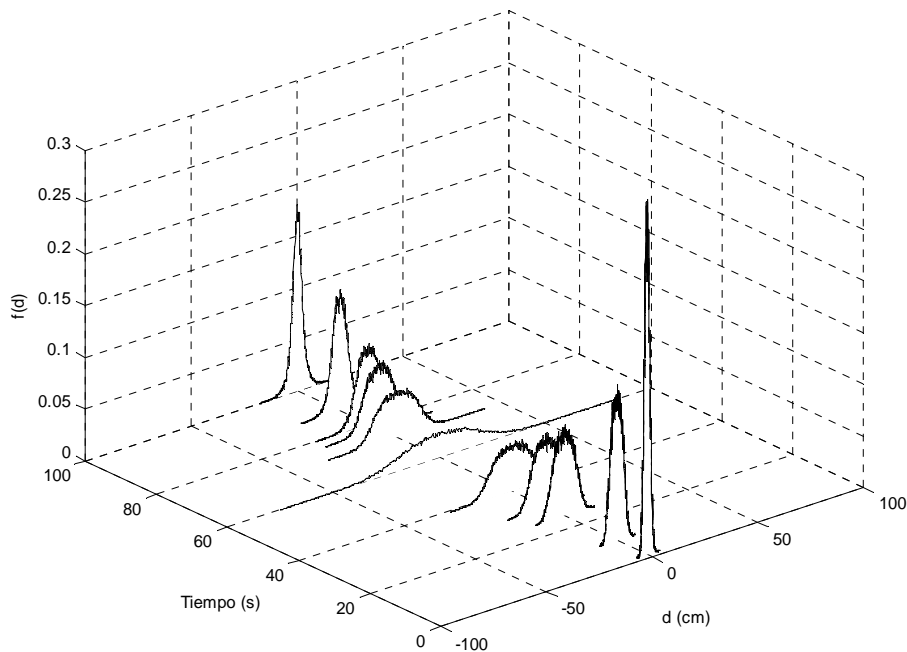


Figura 1. Evolución en el tiempo de la función de densidad de probabilidad del desplazamiento

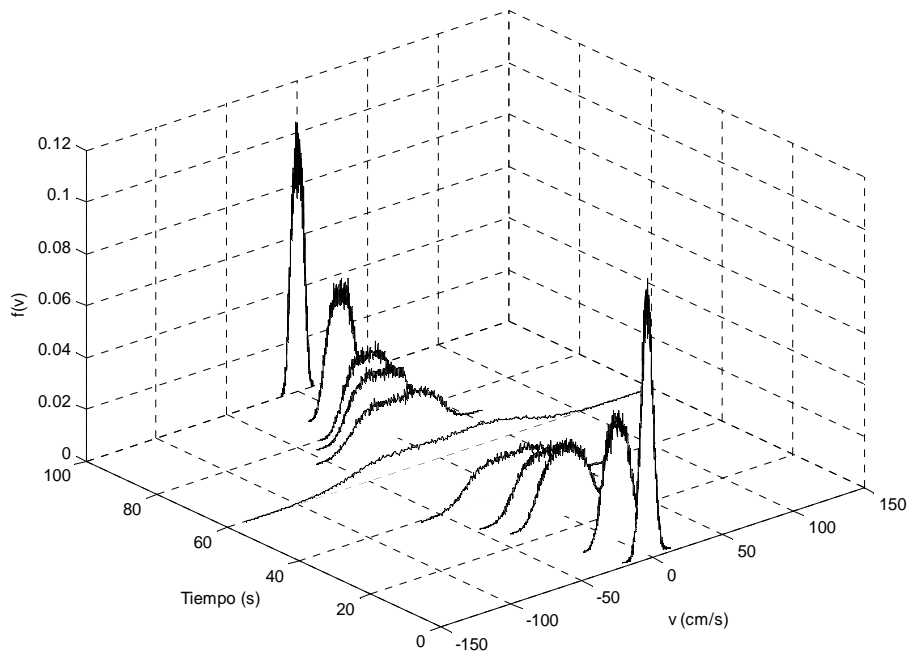


Figura 2. Evolución en el tiempo de la función de densidad de probabilidad de la velocidad

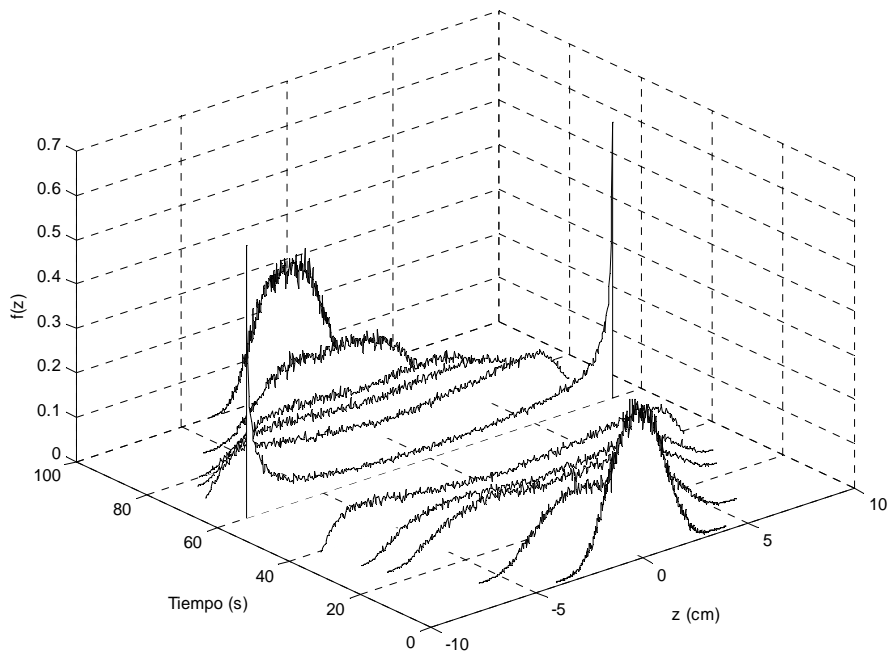


Figura 3. Evolución en el tiempo de la función de densidad de probabilidad de la parte histerética del desplazamiento

donde  $a\varphi_Z$  es una función gaussiana con media cero y varianza  $\sigma_{za}$ ,  $b\varphi_Z$  es una función gaussiana con media  $\pm z$  y varianza  $\sigma_{zb}$ , y  $p$  es un factor de peso.

Además de modelar como se describió anteriormente, las funciones de densidad de probabilidad marginal del desplazamiento, de la velocidad y de la parte histerética del desplazamiento; resulta también necesario modelar la función de densidad de probabilidad conjunta entre el desplazamiento, la velocidad y la parte histerética del desplazamiento  $f_{x\dot{x}z}(x, \dot{x}, z)$ . Existen diversas formas de calcular una función de densidad de probabilidad conjunta con función de densidad de probabilidad marginales prescritas (ver por ejemplo: Johnson *et al.*, 1994; Liu y Der Kiureghian, 1986). En este trabajo se decidió determinar la función de densidad de probabilidad  $f_{x\dot{x}z}(x, \dot{x}, z)$  a partir de la función de densidad de probabilidad condicional de  $x$  y  $\dot{x}$  dado  $z$ , de la siguiente manera:

$$f_{x\dot{x}z}(x, \dot{x}, z) = h(x, \dot{x}|z) f_z(z) \quad (7)$$

donde  $h(x, \dot{x}|z)$  es la función de densidad de probabilidad condicional de  $x$  y  $\dot{x}$  dado  $z$  y  $f_z(z)$  es la densidad de probabilidad marginal de  $z$  dada por la ec. 6. Se adopta un procedimiento de estimación lineal, el cual lleva a plantear las siguientes tres hipótesis sobre la función de densidad de probabilidad condicional conjunta del desplazamiento y de la velocidad:

- Es conjuntamente normal para cada valor real de  $z$ .
- Sus medias condicionales son funciones lineales de  $z$ .
- Sus varianzas condicionales son constantes, no dependen de ningún valor de  $z$ .

Además, se considera que la media del proceso de respuesta es cero. Al usar estas hipótesis junto con las ecs. (6) y (7) se obtiene (Silva, 2002):

$$f_{x\dot{x}z}(x, \dot{x}, z) = \frac{1-2p}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_{\dot{x}} \sigma_{za} \kappa^{1/2}} \text{Exp} \left[ -\frac{1}{2\kappa} \begin{pmatrix} \frac{z^2}{\sigma_{za}^2} (1-\rho_{x\dot{x}}^2) + \left( \frac{z^2}{\sigma_z^2} - \frac{z^2}{\sigma_{za}^2} \right) (\rho_{xz}^2 + \rho_{\dot{x}z}^2 - 2\rho_{x\dot{x}}\rho_{xz}\rho_{\dot{x}z}) \\ + \frac{x^2}{\sigma_x^2} (1-\rho_{xz}^2) + \frac{\dot{x}^2}{\sigma_{\dot{x}}^2} (1-\rho_{\dot{x}z}^2) - 2\frac{xz}{\sigma_x\sigma_z} (\rho_{xz} - \rho_{x\dot{x}}\rho_{\dot{x}z}) \\ - 2\frac{x\dot{x}}{\sigma_x\sigma_{\dot{x}}} (\rho_{xz} - \rho_{x\dot{x}}\rho_{\dot{x}z}) - 2\frac{x\dot{x}}{\sigma_{\dot{x}}\sigma_x} (\rho_{\dot{x}z} - \rho_{xz}\rho_{\dot{x}z}) \end{pmatrix} \right] +$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{p}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_{\dot{x}} \sigma_{z_b} \kappa^{1/2}} \text{Exp} \left[ -\frac{1}{2\kappa} \left( \frac{(z-z_z)^2}{\sigma_{z_b}^2} (1-\rho_{x\dot{x}}^2) + \left( \frac{z^2}{\sigma_z^2} - \frac{(z-z_z)^2}{\sigma_{z_b}^2} \right) (\rho_{x\dot{x}}^2 + \rho_{x\dot{x}}^2 - 2\rho_{x\dot{x}}\rho_{x\dot{x}}\rho_{x\dot{x}}) \right) \right. \\
 & \left. + \frac{x^2}{\sigma_x^2} (1-\rho_{x\dot{x}}^2) + \frac{\dot{x}^2}{\sigma_{\dot{x}}^2} (1-\rho_{x\dot{x}}^2) - 2\frac{x\dot{x}}{\sigma_x \sigma_{\dot{x}}} (\rho_{x\dot{x}} - \rho_{x\dot{x}}\rho_{x\dot{x}}) \right. \\
 & \left. - 2\frac{xz}{\sigma_x \sigma_z} (\rho_{x\dot{x}} - \rho_{x\dot{x}}\rho_{x\dot{x}}) - 2\frac{x\dot{x}}{\sigma_{\dot{x}} \sigma_x} (\rho_{x\dot{x}} - \rho_{x\dot{x}}\rho_{x\dot{x}}) \right] + \\
 & \frac{p}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_{\dot{x}} \sigma_{z_b} \kappa^{1/2}} \text{Exp} \left[ -\frac{1}{2\kappa} \left( \frac{(z+z_z)^2}{\sigma_{z_b}^2} (1-\rho_{x\dot{x}}^2) + \left( \frac{z^2}{\sigma_z^2} - \frac{(z+z_z)^2}{\sigma_{z_b}^2} \right) (\rho_{x\dot{x}}^2 + \rho_{x\dot{x}}^2 - 2\rho_{x\dot{x}}\rho_{x\dot{x}}\rho_{x\dot{x}}) \right) \right. \\
 & \left. + \frac{x^2}{\sigma_x^2} (1-\rho_{x\dot{x}}^2) + \frac{\dot{x}^2}{\sigma_{\dot{x}}^2} (1-\rho_{x\dot{x}}^2) - 2\frac{x\dot{x}}{\sigma_x \sigma_{\dot{x}}} (\rho_{x\dot{x}} - \rho_{x\dot{x}}\rho_{x\dot{x}}) \right. \\
 & \left. - 2\frac{xz}{\sigma_x \sigma_z} (\rho_{x\dot{x}} - \rho_{x\dot{x}}\rho_{x\dot{x}}) - 2\frac{x\dot{x}}{\sigma_{\dot{x}} \sigma_x} (\rho_{x\dot{x}} - \rho_{x\dot{x}}\rho_{x\dot{x}}) \right] \quad (8)
 \end{aligned}$$

donde  $\kappa = 1 - \rho_{x\dot{x}}^2 - \rho_{x\dot{x}}^2 - \rho_{x\dot{x}}^2 + 2\rho_{x\dot{x}}\rho_{x\dot{x}}\rho_{x\dot{x}}$ .

### Cálculo de los parámetros $\sigma_{z_a}$ , $\sigma_{z_b}$ , $p$ y $z_z$

Los parámetros  $\sigma_{z_a}$ ,  $\sigma_{z_b}$ ,  $p$  y  $z_z$  de la función de densidad de probabilidad dada por la ec. 8, se determinan a través de coeficientes adimensionales que llevan implícito el nivel de no linealidad de la respuesta del sistema. Se propone como medida de la no gaussianidad del proceso de respuesta al parámetro (Hurtado, 1998):

$$\lambda(t) = \int_{-\infty}^{-z_u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z(t)} \text{Exp}\left(-\frac{z^2}{2\sigma_z^2(t)}\right) dz = \frac{1}{2} \left( 1 - \text{Erf}\left(\frac{z_u}{\sqrt{2}\sigma_z(t)}\right) \right) \quad (9)$$

Si la resistencia del sistema es alta ( $z_u$  grande) y la respuesta/excitación es baja ( $\sigma_z$  pequeña), entonces  $\lambda$  es cercana a cero y la densidad de probabilidad de  $z$  dada por la ec. 6 será gaussiana. Si la resistencia del sistema es baja ( $z_u$  pequeña) y su respuesta/excitación alta ( $\sigma_z$  grande)  $\lambda$  será grande y la densidad de probabilidad de  $z$  dada por la ec. 6 será no gaussiana. Después de haber analizado mediante simulación de Monte Carlo varios sistemas con diferentes periodos y demandas de ductilidad se encontró que el intervalo de  $\lambda$  es  $0 \leq \lambda \leq 0.1$ . Se proponen las siguientes expresiones (Silva, 2002) para calcular los parámetros  $\sigma_{z_a}$ ,  $\sigma_{z_b}$ ,  $p$  y  $z_z$

$$\begin{aligned}
 \frac{z_z(t)}{z_u} &= 0.187594 \text{Ln}(31.9902\lambda(t) + 0.042957) + 0.590462 \\
 p(t) &= 0.043416 \text{Ln}(455.1269\lambda(t) + 0.003949) + 0.240276 \\
 \frac{\sigma_{za}(t)}{\sigma_z(t)} &= -0.269012 \text{Ln}(8.247666\lambda(t) + 0.125757) + 0.442229 \\
 \frac{\sigma_{zb}(t)}{\sigma_z(t)} &= -0.239519 \text{Ln}(1.408468\lambda(t) + 0.007419) - 0.391143
 \end{aligned} \tag{10}$$

Obsérvese que los parámetros  $\sigma_{za}$ ,  $\sigma_{zb}$ ,  $p$  y  $z_z$  son función del tiempo, lo cual permite considerar el carácter evolutivo de la densidad de probabilidad conjunta de la respuesta.

### LINEALIZACIÓN ESTOCÁSTICA EQUIVALENTE NO GAUSSIANA

En el método de linealización equivalente, se propone reemplazar la ec. 2 por la siguiente ecuación diferencial lineal

$$\dot{z} = s_e x + c_e \dot{x} + k_e z \tag{11}$$

donde  $s_e$ ,  $c_e$  y  $k_e$  son coeficientes linealizadores. Con el fin de minimizar el valor esperado del cuadrado de la diferencia entre las ecs. 2 y 11, los coeficientes linealizadores deben satisfacer la siguiente relación

$$H_e = E[QQ^T]^{-1} E[hQ] \tag{12}$$

donde  $Q$  es el vector de respuesta y  $H_e$  el de coeficientes linealizadores equivalentes, dados por:  $Q = [x \ \dot{x} \ z]$  y  $H_e = [s_e \ c_e \ k_e]$ .

Al usar en la ec. 12 la función de densidad de probabilidad conjunta propuesta se obtienen expresiones analíticas para los coeficientes linealizadores. Enseguida se muestran los coeficientes linealizadores para el caso particular en que  $n=1$ :

$$s_e = 0$$

$$c_e = (1 - 2p) \left\{ A - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \beta \frac{\rho_{xz} \sigma_{za}^2}{\sqrt{\varepsilon_a}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \gamma \sigma_{za} \right\} + 2p \left\{ \begin{aligned} & A - \beta \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\rho_{xz} \sigma_{zb}^2}{\sqrt{\varepsilon_b}} \text{Exp} \left( -\frac{z_z^2 \rho_{xz}^2}{2\varepsilon_b} \right) + z_z \text{Erf} \left( \frac{z_z \rho_{xz}}{\sqrt{2\varepsilon_b}} \right) \right\} - \\ & \gamma \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_{zb} \text{Exp} \left( -\frac{z_z^2}{2\sigma_{zb}^2} \right) + z_z \text{Erf} \left( \frac{z_z}{\sqrt{2}\sigma_{zb}} \right) \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$k_e = (1-2p) \left\{ \begin{array}{l} A \frac{\rho_{xz} \sigma_x (\sigma_{za}^2 - \sigma_z^2)}{\sigma_z^3} - \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \beta \frac{\sigma_x \sigma_{za}^2 (\varepsilon_a + \rho_{xz}^2 (\sigma_{za}^2 - \sigma_z^2))}{\sigma_z^3 \sqrt{\varepsilon_a}} - \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \gamma \frac{\rho_{xz} \sigma_x \sigma_{za} (2\sigma_{za}^2 - \sigma_z^2)}{\sigma_z^3} \end{array} \right\} + 2p \left\{ \begin{array}{l} A \frac{\rho_{xz} \sigma_x (z_z^2 + \sigma_{zb}^2 - \sigma_z^2)}{\sigma_z^3} - \\ \beta \frac{\sigma_x}{\sigma_z^3} \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{Exp} \left( -\frac{z_z^2 \rho_{xz}^2}{2\varepsilon_b} \right) \frac{z_z^2 \varepsilon_b + \sigma_{zb}^2 (\varepsilon_b + \rho_{xz}^2 (\sigma_{zb}^2 - \sigma_z^2))}{\sqrt{\varepsilon_b}} + \right. \\ \left. z_z \rho_{xz} (z_z^2 + 3\sigma_{zb}^2 - \sigma_z^2) \text{Erf} \left( \frac{z_z \rho_{xz}}{\sqrt{2\varepsilon_b}} \right) \right\} + \\ \gamma \frac{\rho_{xz} \sigma_x}{\sigma_z^3} \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{Exp} \left( -\frac{z_z^2}{2\sigma_{zb}^2} \right) \sigma_{zb} (z_z^2 + 2\sigma_{zb}^2 - \sigma_z^2) + \right. \\ \left. z_z (z_z^2 + 3\sigma_{zb}^2 - \sigma_z^2) \text{Erf} \left( \frac{z_z}{\sqrt{2\sigma_{zb}}} \right) \right\} \end{array} \right\} \quad (13)$$

donde  $\varepsilon_a = (1 - \rho_{xz}^2) \sigma_z^2 + \rho_{xz}^2 \sigma_{za}^2$  y  $\varepsilon_b = (1 - \rho_{xz}^2) \sigma_z^2 + \rho_{xz}^2 \sigma_{zb}^2$ .

### COVARIANZA DE LA RESPUESTA DEL SISTEMA HISTERÉTICO

La matriz de covarianza de la respuesta del sistema histerético de un grado de libertad  $\Sigma_Y(t) = E[qq^T]$  con  $q(t) = \{x \quad \dot{x} \quad z \quad x_f \quad x_g \quad \dot{x}_f \quad \dot{x}_g\}^T$ , se calcula resolviendo la siguiente ecuación (Roberts y Spanos, 1990):

$$\frac{d\Sigma_Y(t)}{dt} = A_e(t)\Sigma_Y(t) + \Sigma_Y(t)A_e^T(t) + 2\pi\mathcal{S}_F \quad (14)$$

donde  $A_e$  es una matriz que depende de las propiedades mecánicas y geométricas del sistema así como de los coeficientes linealizadores y de la función moduladora:

$$A_e(t) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_2 \omega^2 & -2\xi \omega & -(1-\alpha_2)\omega^2 & \omega_f^2 c(t) & -\omega_g^2 c(t) & 2\xi_f \omega_f c(t) & -2\xi_g \omega_g c(t) \\ s_e & c_e & k_e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_f^2 & \omega_g^2 & -2\xi_f \omega_f & 2\xi_g \omega_g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_g^2 & 0 & -2\xi_g \omega_g \end{array} \right] \quad (15)$$

$\mathcal{S}_F$  es una matriz de ceros excepto un elemento que depende de la intensidad del ruido blanco:

$$S_F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

En la solución de la ec. 14 es esencial comenzar el proceso de integración en el instante en que la respuesta de los filtros ha alcanzado su estado estacionario. Por lo tanto, las condiciones iniciales de la matriz de covarianza de la respuesta deben corresponder a la covarianza de la respuesta estacionaria del filtro de Clough-Penzien (Silva, 2002; Roberts y Spanos, 1990).

## APLICACIÓN

Se calcula la respuesta de un sistema histerético de un grado de libertad con periodo de vibración igual a 2.1s y con una demanda de ductilidad esperada  $\eta$  igual a 4, el cual es sometido a un proceso aleatorio de excitación obtenido a partir de las características del sismo registrado en la Cd. de México en la Secretaria de Comunicaciones y Transportes durante el temblor del 19 de septiembre de 1985.

Se calculó el espectro de Fourier del acelerograma y con él se estimó la densidad espectral del proceso de excitación. También se calculó la curva de intensidad de Arias. Se realizó un ajuste no lineal para calcular los parámetros de las ecs. 3 y 4. La intensidad del ruido blanco obtenida es:  $s_0 = 7.2776 \times 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{s}^3$ , los parámetros del filtro son:  $\omega_g = 3.1017$ ,  $\xi_g = 0.0220$ ,  $\omega_f = 2.2988$  y  $\xi_f = 0.0492$ , y los de la función moduladora son:  $a = 5.8161 \times 10^{48} \text{ cm}^2/\text{s}^4$ ,  $b = -0.3388$ ,  $c = -0.1258$ ,  $d = 2.166 \times 10^{47}$  y  $e = 26.461$ . En la fig. 4 se muestran la densidad espectral bilateral y su modelo. En la fig. 5 se muestra la curva de intensidad acumulada de Arias del sismo junto con su modelo.

La respuesta del sistema histerético de un grado de libertad se calcula mediante linealización equivalente y simulación de Monte Carlo utilizando 50,000 sismos simulados. Se emplean tres criterios de linealización: el gaussiano (Atalik y Utku, 1976), el método no gaussiano de Hurtado (1998) y el presentado en este trabajo. En el método de Hurtado se utiliza un valor del factor empírico para el peso de las deltas de Dirac (véase Hurtado (1998) para detalles) igual a  $r = -0.5$ . En las figs. 6 a 8 se muestra la respuesta del sistema ante el proceso de excitación descrito anteriormente.

En la figura 6 se observa que el método propuesto al igual que el método gaussiano no predice la respuesta permanente que el sistema histerético estudiado experimenta.

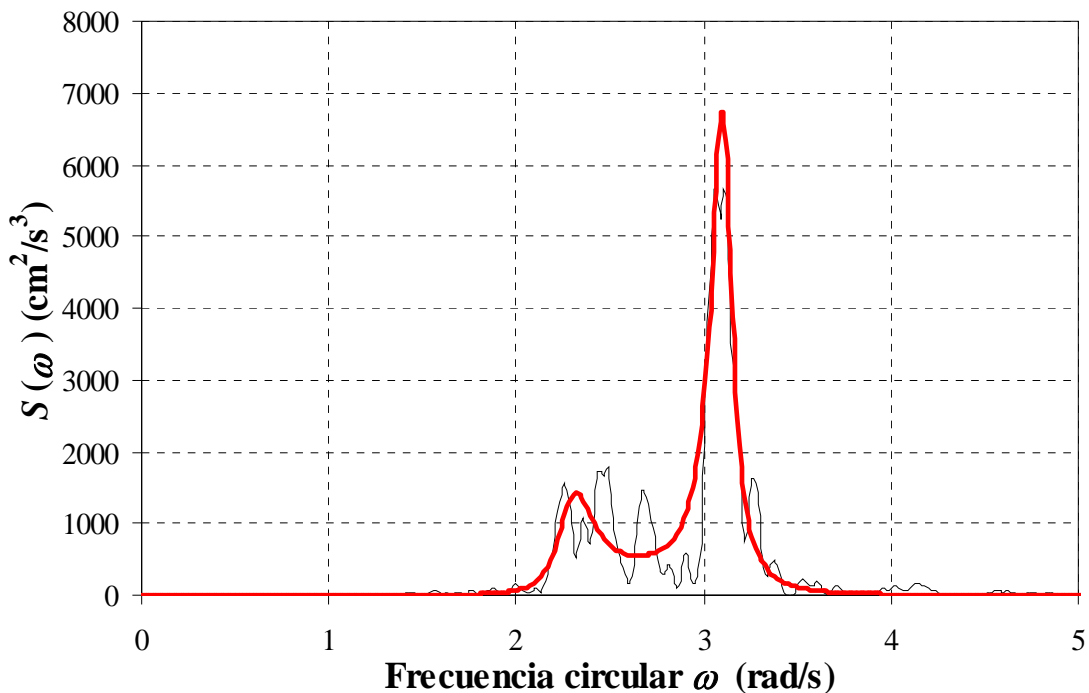


Figura 4. Densidad espectral bilateral del proceso de excitación, y su modelo correspondiente

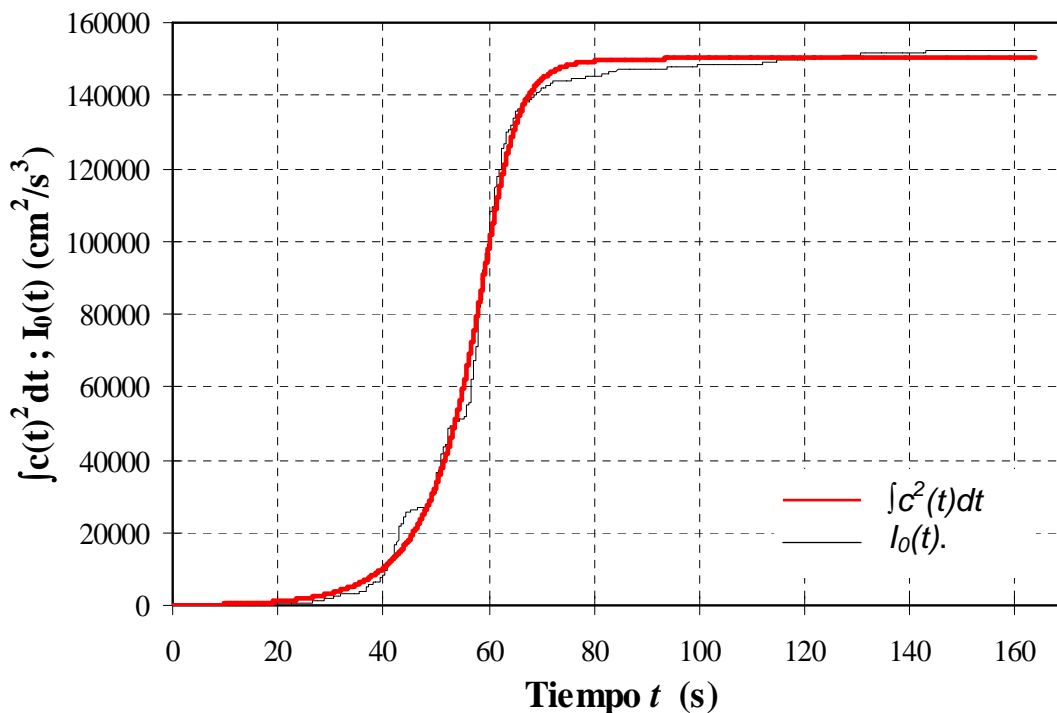


Figura 5. Intensidad acumulada de Arias del sismo ( $I_0$ ), y su modelo correspondiente

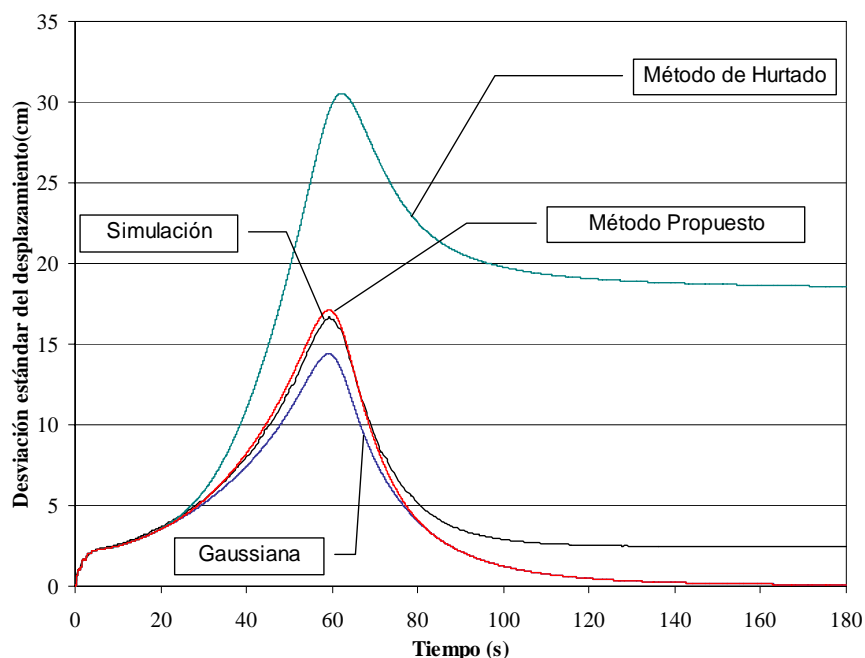


Figura 6. Desviación estándar del desplazamiento, obtenida con linealización equivalente y simulación de Monte Carlo.

La bondad del método propuesto se determina en función de los errores relativos en el cálculo de los valores máximos de  $\sigma_x$ ,  $\sigma_x$  y  $\sigma_z$ , calculados con:

$$\varepsilon(\%) = \frac{\text{respuesta obtenida con linealización} - \text{respuesta obtenida con simulación}}{\text{respuesta obtenida con simulación}} \times 100 \quad (17)$$

Los errores relativos de los valores máximos de la respuesta asociados a los resultados mostrados en las figs. 6 a 8 se muestran en la tabla 1. Un valor negativo indica que la linealización equivalente subestima la respuesta.

Tabla 1. Errores relativos en el cálculo de la respuesta máxima de un sistema con  $T=2.1$  y  $\eta=4.0$

Método	Error en: $\max[\sigma_x]$	Error en: $\max[\sigma_x]$	Error en: $\max[\sigma_z]$
Gaussiano	-13.59	-9.29	-19.42
Hurtado ( $r=-0.5$ )	83.35	-4.24	-14.89
Propuesto	2.72	6.50	-0.31

A partir de la tabla 1 se observa que el método propuesto funciona mejor que los otros dos criterios de linealización. En Silva (2002) se analizan sistemas con diferentes periodos y demandas de ductilidad esperadas ante el mismo proceso de excitación. A partir de esos

resultados se puede afirmar que el método es razonablemente preciso para la estimación de los valores máximos de las covarianzas de sistemas histeréticos de un grado de libertad.

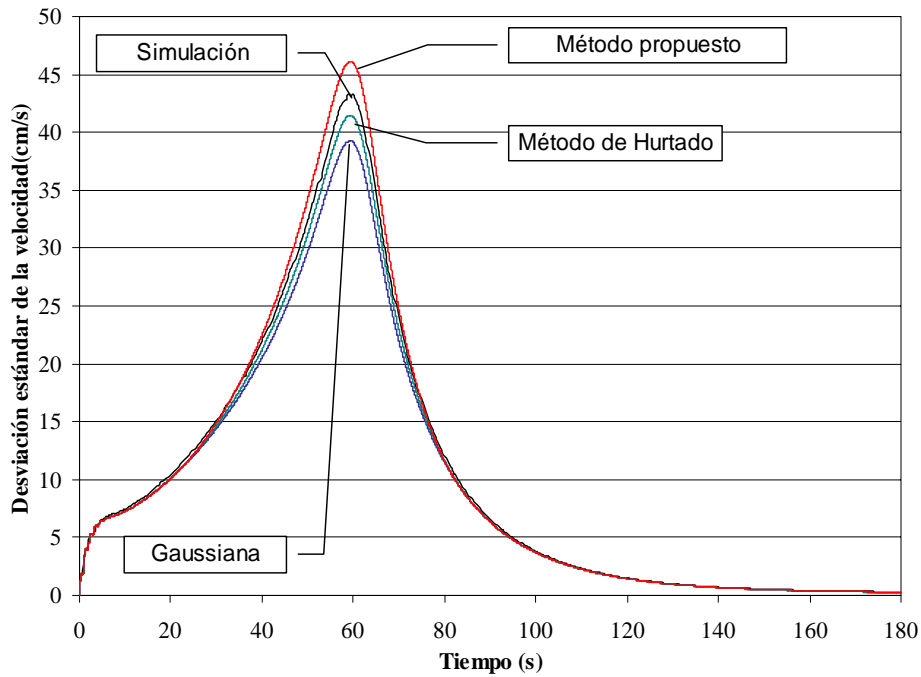


Figura 7. Desviación estándar de la velocidad, obtenida con linealización equivalente y simulación de Monte Carlo.

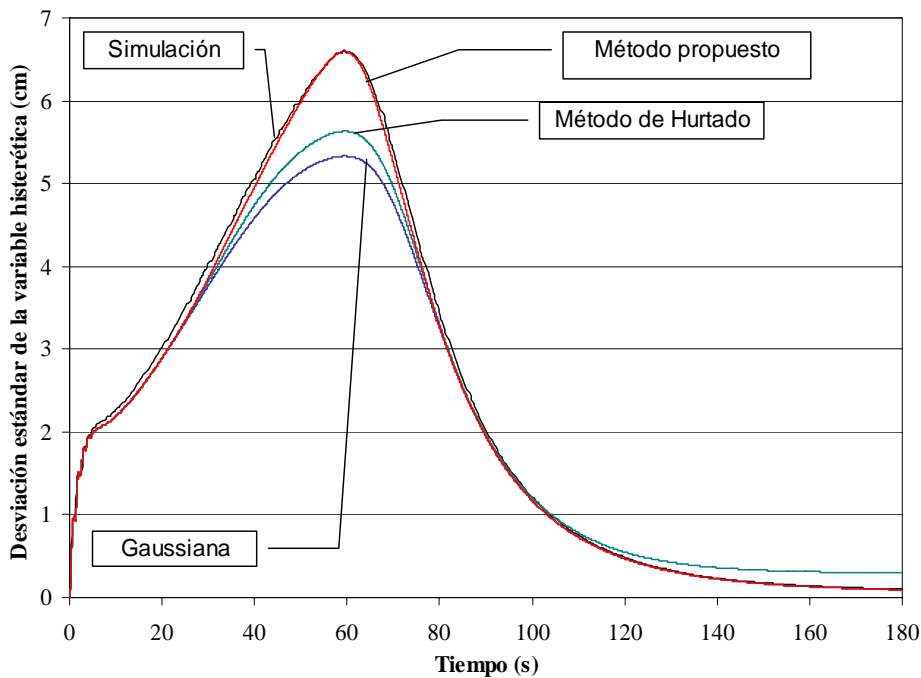


Figura 8. Desviación estándar de la variable histerética, obtenida con linealización equivalente y simulación de Monte Carlo.

## CONCLUSIONES

Se ha propuesto un método de linealización equivalente que proporciona resultados aceptables. El error relativo obtenido es mucho menor al obtenido con otros métodos de linealización equivalente propuestos de la literatura.

Con el método propuesto se obtienen expresiones analíticas que definen los coeficientes linealizadores.

Los parámetros del modelo de la función de densidad de probabilidad de la respuesta, pueden aproximarse de manera simple sin tener que recurrir a la simulación de Monte Carlo.

El método propuesto es versátil y sigue preservando la eficiencia computacional del método gaussiano convencional.

El criterio propuesto es adecuado para estimar los valores máximos de las covarianzas de la respuesta, sin embargo no reproduce adecuadamente la respuesta de sistemas que exhiben el fenómeno de deriva de desplazamiento (*drift* en inglés).

## RECONOCIMIENTOS

El primer autor agradece al Dr. Jorge E. Hurtado su grata atención durante su estancia en la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales, en la que se tuvieron conversaciones muy fructíferas. Quiere además reconocer su generosidad académica al facilitar el uso de su programa para llevar a cabo las simulaciones de Monte Carlo.

También se agradece al Profesor Mircea Grigoriu por sus importantísimas opiniones, y por la grata atención que tuvo con el primer autor durante su visita a la Universidad Cornell, en Ithaca, Nueva York.

Así mismo se agradecen las valiosas sugerencias del Profesor Pol D. Spanos de la Universidad Rice en Houston, Texas.

## REFERENCIAS

Atalik, T S y S Utku (1976), "Stochastic linearization of multi-degree-of-freedom non-linear systems", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 4, pp. 411-420.

Clough, R W y J Penzien (1975), *Dynamics of structures*, McGraw Hill, Nueva York.

Hurtado, J E (1998), *Stochastic dynamics of hysteretic structures*, Monograph Series in Earthquake Engineering, editado por A.H. Barbat, International Center for Numerical Methods in Engineering, Barcelona, España.

Johnson, N L, S Kotz y N Balakrishan (1994), *Continuous univariate distributions*, segunda edición, John Wiley and Sons, Nueva York.

Kimura, K, H Yasumuro y M Sakata (1994), "NonGaussian equivalent linearization for non-stationary random vibration of hysteretic system", *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 9, pp. 15-22.

Liu, P y A Der Kiureghian (1986), "Multivariate distribution models with prescribed marginals and covariances", *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 1, pp. 105-112.

Pradlwarter, H J y G I Schuëller (1991), "The method of statistical equivalent linearization" en: *Structural Dynamics. Recent Advances*, editado por G.I. Schuëller, Springer-Verlag, Berlin.

Roberts, J B y P D Spanos (1990), *Random vibration and statistical linearization*, John Wiley & Sons.

Schuëller, G I, M D Pandey y H J Pradlwarter (1994), "Equivalent linearization (EQL) in engineering practice for aseismic design", *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 9, pp. 95-102.

Silva, F L y S E Ruiz (2000), "Calibration of the linearization Gaussian approach applied to simple hysteretic systems subjected to narrow band seismic motions", *Structural Safety*, Vol. 22, pp. 211-231.

Silva, F L (1998), "Calibración del método de linealización equivalente estocástica para sistemas histeréticos simples", *Tesis de Maestría*, División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, UNAM.

Silva, F L (2002), "Respuesta estocástica de estructuras histeréticas sujetas a sismos", *Tesis Doctoral*, División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, UNAM.

Silva, F L, J L Rivera, S E Ruiz y J E Hurtado (2001), "Influence of the mathematical modeling of the seismic input on the non-Gaussian response of non-linear systems", *Memorias, International Conference on Structural Safety and Reliability (ICOSSAR 2001)*, Newport Beach, California, Estados Unidos, junio.

Wen, Y K (1980), "Equivalent linearization for hysteretic systems under random excitation", *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 47, pp. 150-154.

Yeh, C H y Y K Wen (1989), "Modeling of nonstationary earthquake ground motion and biaxial and torsional response of inelastic structures", *Structural Research Series No. 546*, Department of Civil and Environmental Engineering, Universidad de Illinois en Urbana-Champaign, Urbana, IL, Estados Unidos.