

MÉTODO PARA CALCULAR LAS RIGIDECES Y LOS AMORTIGUAMIENTOS DINÁMICOS DE GRUPO DE PILOTES DE FRICCIÓN

Carlos Alonso Cruz Noguez⁽¹⁾, David Murià Vila⁽²⁾ y José Camargo Pérez⁽¹⁾

RESUMEN

Se presenta un método sencillo y accesible para el cálculo de las rigideces y los amortiguamientos de estructuras cimentadas sobre pilotes de fricción, tomando en cuenta los efectos de grupo. El procedimiento se basa en el planteamiento de Novak y Aboul-Ella para la obtención de la rigidez y el amortiguamiento de un pilote aislado. Para calcular los parámetros correspondientes del grupo completo de pilotes, se propone utilizar el método simplificado de Dobry y Gazetas. En la validación del procedimiento, sus resultados se compararon con las soluciones rigurosas de Kaynia y Kausel y con un programa comercial de análisis de cimentaciones que permite incluir los efectos de grupo. Se muestra la aplicación del método a la cimentación de un edificio instrumentado en México y los resultados se comparan con el procedimiento que aparece en el reglamento de construcciones del Distrito Federal y con datos experimentales.

ABSTRACT

A simple, easy method for the computation of stiffness and damping of a pile foundation, considering group effects, is presented. The procedure is based on the methodology of Novak and Aboul-Ella to obtain the stiffness and damping of an isolated pile. In order to calculate these values for a pile group, the simple method of Dobry and Gazetas is used. The procedure is validated with the rigorous solutions of Kaynia and Kausel as well as commercial software for analysis of foundations by mean of which group effects are included. The method is applied to the foundation of an instrumented building in Mexico and the results are compared with the procedure from the Mexico City building code and with experimental data.

INTRODUCCIÓN

Cuando una estructura se encuentra desplantada sobre suelo blando es necesario tener en cuenta el fenómeno de interacción suelo-estructura (ISE), que consiste en un conjunto de efectos cinemáticos e inerciales producidos en la estructura y el suelo, como resultado de la flexibilidad de éste ante la excitación sísmica (Whitman y Bielak, 1980). Los efectos ISE modifican las propiedades dinámicas relevantes de la estructura, así como las características del movimiento del terreno en la vecindad de la cimentación.

Artículo recibido el 23 de marzo de 2007 y aprobado para su publicación el 11 de octubre de 2007. Se aceptarán comentarios y/o discusiones hasta cinco meses después de su publicación.

⁽¹⁾ Becario, Instituto de Ingeniería, UNAM, Ciudad Universitaria, 04510 México, DF. Tel.: 5623-3600 Ext. 8407.

⁽²⁾ Investigador, Instituto de Ingeniería UNAM, Ciudad Universitaria, 04510 México, DF. Tel.: 5623-3644 , correo electrónico: dmv@pumas.ii.unam.mx

El análisis de la información proveniente de edificios instrumentados ha mostrado que es primordial la consideración de los efectos ISE para poder estimar adecuadamente la respuesta estructural (Murià Vila *et al.*, 1997; 2000; 2004). Sin embargo, en la práctica profesional los efectos ISE no se toman en cuenta, salvo en muy contadas ocasiones. Una de las razones por las cuales los efectos ISE no se incluyen en el análisis es porque se requiere de cálculos adicionales laboriosos, relacionados con la estimación de impedancias (rigideces y amortiguamientos dinámicos) de las cimentaciones. Para estructuras cimentadas sobre pilotes, estos cálculos pueden llegar a ser particularmente laboriosos. Además, en este tipo de cimentaciones se presenta un fenómeno de interacción entre pilotes que controla la impedancia total, lo cual implica que ésta sea diferente a la suma de las impedancias individuales de cada pilote. Este fenómeno, denominado efecto de grupo, no es tomado en cuenta por ninguna norma mexicana a pesar de su gran relevancia, como lo evidencian los casos analizados de edificios instrumentados en México (Murià Vila *et al.*, 2004; Correa y Murià Vila, 2005).

Mediante análisis de elementos finitos o elementos de frontera pueden estimarse en forma rigurosa las funciones de impedancia en cimentaciones con grupos de pilotes (Wolf y von Arx, 1978; Nogami, 1979; Gómez y Roesset, 1982; Kaynia y Kausel, 1982; Waas y Hartmann, 1984; Roesset, 1984), pero este tipo de análisis tienen la desventaja de que sólo resultan económicos en proyectos de gran envergadura o para fines de investigación. En consecuencia, cuando en la práctica se estima la impedancia global en cimentaciones con pilotes de fricción, los efectos de grupo no se consideran en el análisis. El resultado es un modelo de la cimentación que puede conducir a errores graves en la determinación de la respuesta estructural.

Ante la necesidad de contar con un método práctico para tomar en cuenta los efectos de grupo en cimentaciones con pilotes de fricción, en este trabajo se adoptó el método simplificado de Dobry y Gazetas (1988), basado en expresiones analíticas sencillas. El uso de este método tiene ventajas notables, como son la facilidad de aplicación y una comprensión más clara de los factores que controlan el problema. El método presentado permite estimar las impedancias globales en los componentes de movimiento vertical, horizontal y de cabeceo. El componente de torsión no fue abordado por Dobry y Gazetas y en este estudio se hace una propuesta para analizarlo.

Para la aplicación del método simplificado, éste se implementó en un programa de cómputo mediante el cual se realizaron pruebas similares a las de Dobry y Gazetas (1988), en las que el método es comparado respecto a las soluciones rigurosas de Kaynia y Kausel (1982), y Gómez y Roesset (1982). El nuevo planteamiento de torsión es validado con las soluciones rigurosas para grupos de pilotes de 2x2, 3x3 y 4x4 pilotes. Las pruebas realizadas por Dobry y Gazetas estuvieron limitadas a una relación de rigidez pilote-suelo $E_p/E_s = 1000$ y grupos reducidos (menores de 20 pilotes), por lo que no cubren la mayoría de los casos de edificios reales. Para subsanar estas limitaciones, en este estudio se analiza el comportamiento de las rigideces y amortiguamientos dinámicos en grupos grandes de pilotes y la influencia de la relación de rigideces E_p/E_s en las funciones de impedancia globales. Finalmente, se muestra la aplicación del método en un edificio instrumentado en México.

METODOLOGÍA DE ANÁLISIS

Funciones de impedancia

A la relación en estado estacionario entre una fuerza (momento) armónica aplicada a una cimentación rígida carente de masa y el desplazamiento (rotación) resultante, se le conoce como función de impedancia. Las funciones de impedancia son números complejos que permiten

considerar tanto la magnitud como la fase de las fuerzas aplicadas a la cimentación y los desplazamientos resultantes. La función de impedancia $\mathcal{K}(\omega)$ de una cimentación se denota

$$\mathcal{K}(\omega) = \bar{K} + i\omega C \quad (1)$$

donde \bar{K} es la rigidez dinámica, C es el coeficiente dinámico de amortiguamiento viscoso equivalente, $i^2 = -1$ y ω es la frecuencia circular de excitación. La parte real de la función de impedancia, \bar{K} , representa la rigidez e inercia del sistema suelo-cimentación. Como las propiedades del suelo son casi independientes de la frecuencia, el carácter dinámico de \bar{K} proviene del hecho de que es la inercia del suelo la que varía con la frecuencia de excitación. La parte imaginaria de la función de impedancia representa el amortiguamiento del sistema, tanto hysterético como de radiación, y se expresa por medio del coeficiente de amortiguamiento dinámico C . Para una cimentación a base de pilotes, los desplazamientos (rotaciones) y las fuerzas (momentos) están referidos a la losa rígida que une los cabezales de los pilotes (fig. 1).

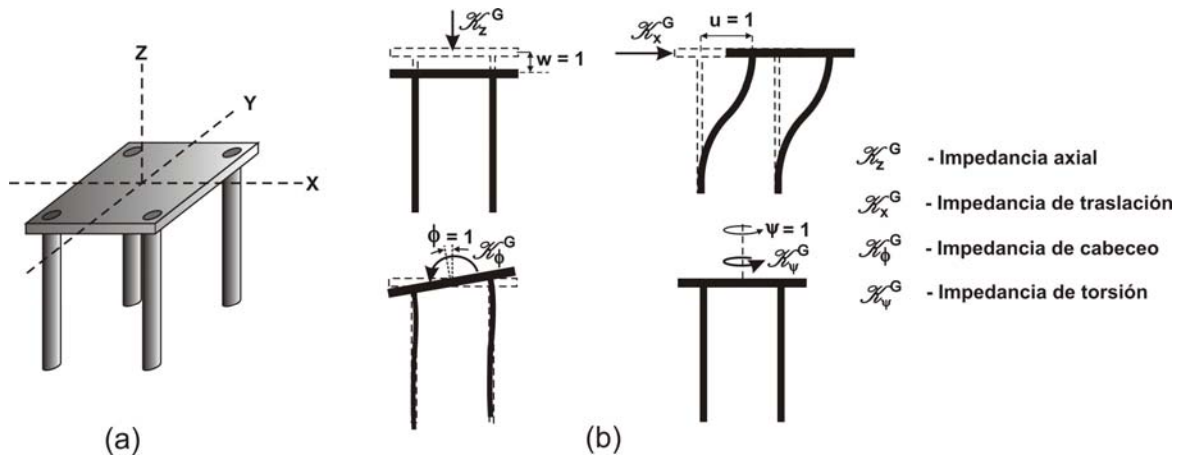


Figura 1 Cimentación con pilotes. a) Sistema de referencia y b) funciones de impedancia

Los procedimientos para determinar la impedancia global en cimentaciones con pilotes de fricción pueden dividirse en análisis completos de grupo de pilotes (modelos tridimensionales del problema con elementos finitos o elementos de frontera) y en análisis con métodos simplificados, basados en factores de interacción (en los cuales la impedancia de grupo se obtiene analizando los movimientos de dos pilotes a la vez). El método simplificado que se emplea en este trabajo es un planteamiento de este tipo, propuesto por Dobry y Gazetas (1988), el cual se basa en la solución acústica que gobierna la propagación de las ondas emitidas por superficies cilíndricas.

El método simplificado de Dobry-Gazetas considera las siguientes hipótesis (Dobry y Gazetas, 1988; Makris y Gazetas, 1992):

- Asume como válido el principio de superposición, considerando que la impedancia de grupo puede obtenerse a partir de los factores de interacción correspondientes al análisis de dos pilotes a la vez.
- Las ondas cilíndricas producidas por un pilote sometido a excitación emanan simultáneamente en toda su longitud y se propagan únicamente en forma horizontal, alcanzando al pilote pasivo con un movimiento con la misma fase en todos los puntos de su longitud. Esta suposición es una aproximación que en el caso del componente traslación

horizontal tiene limitaciones, por lo que se introduce el factor correctivo sugerido por Makris y Gazetas (1992).

- Los desplazamientos del grupo de pilotes son lo suficientemente pequeños como para permanecer dentro del intervalo elástico.
- Asume un suelo con propiedades uniformes, por lo que es necesario definir un semiespacio homogéneo.

Debe tenerse en cuenta que, al igual que los métodos rigurosos para evaluar funciones de impedancia de grupo de pilotes (Wolf y von Arx, 1984; Nogami, 1979; Kaynia y Kausel, 1982; Waas y Hartmann, 1984) el método simplificado de Dobry-Gazetas no toma en consideración varios aspectos del problema de interacción suelo-estructura, como la flexibilidad del sistema (tipo de cimentación, profundidad de desplante y confinamiento efectivo del suelo), y el filtrado de la excitación sísmica (determinado por el área, geometría y rigidez de la cimentación).

Factores de interacción

Poulos (1971) introdujo el concepto de los factores de interacción para grupos de pilotes. Un factor de interacción se define como la fracción de desplazamiento adicional que experimentará un pilote debido a la presencia de otro pilote cercano cargado de la misma manera. Para ilustrar el concepto de factor de interacción, considérese un sistema de dos pilotes idénticos enterrados en un semiespacio elástico (fig. 2a). Cuando al pilote 1 se le aplica una carga axial P , éste experimenta un desplazamiento vertical z_{11} , además de inducir un desplazamiento z_{21} en el pilote 2. El desplazamiento del pilote 2 aislado, bajo la misma carga P , será z_{22} (fig. 2b). En estas condiciones, el factor de interacción vertical entre el pilote 1 (activo) sobre el pilote 2 (pasivo) se define como

$$\alpha_{21} = \frac{\text{Desplazamiento adicional del pilote 2 debido al pilote 1}}{\text{Desplazamiento en el pilote 2 debido a su propia carga}} = \frac{z_{21}}{z_{22}} \quad (2)$$

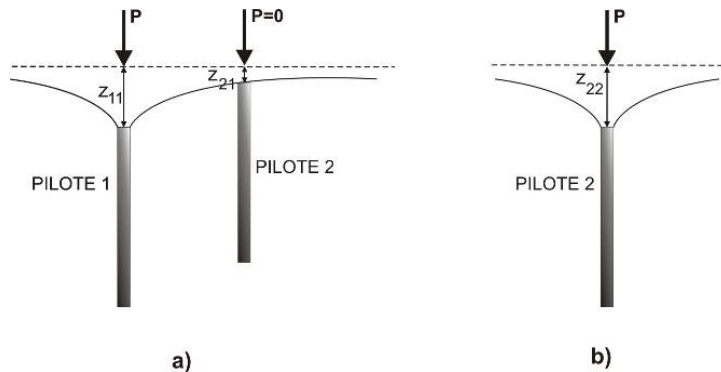


Figura 2 Concepto de factor de interacción. a) Interacción entre pilotes; b) Pilote aislado

En el método simplificado de Dobry-Gazetas, los factores dinámicos de interacción se expresan mediante fórmulas analíticas sencillas que dependen de la frecuencia de excitación, ciertas propiedades del suelo y la relación de espaciamiento S/d , donde S y d son la separación y el diámetro de los pilotes, respectivamente.

Factor de interacción vertical

El factor de interacción vertical $\alpha_{v(i,j)}$ entre dos pilotes i y j se expresa (Dobry y Gazetas, 1988)

$$\alpha_{v(i,j)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{S}{d} \right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\beta\omega S}{V_s}\right) \exp\left(-\frac{i\omega S}{V_s}\right) \quad (3)$$

donde V_s es la velocidad de onda de cortante en el medio homogéneo equivalente y β es la fracción de amortiguamiento histerético del suelo.

Factor de interacción horizontal

El valor del factor de interacción horizontal depende del ángulo θ que forma la línea entre los pilotes activo y pasivo, con respecto a la dirección que tiene la fuerza de excitación. Para un ángulo de 90° respecto de la fuerza de excitación, el factor de interacción lateral entre dos pilotes i y j está dado por

$$\alpha_{h(i,j)}(90^\circ) = \alpha_{v(i,j)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{S}{d} \right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\beta\omega S}{V_s}\right) \exp\left(-\frac{i\omega S}{V_s}\right) \quad (4)$$

Mientras que para la dirección paralela a la excitación ($\theta = 0$), la velocidad de onda usada en la ec. 4 es la correspondiente a la velocidad análoga de Lysmer

$$\alpha_{h(i,j)}(0^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{S}{d} \right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\beta\omega S}{V_{La}}\right) \exp\left(-\frac{i\omega S}{V_{La}}\right) \quad (5)$$

La velocidad análoga de Lysmer se define como $V_{La} = 3.4V_s/\pi(1-\nu)$, siendo ν el módulo de Poisson del suelo homogéneo equivalente. El ángulo θ y su relación con las distintas velocidades de onda se muestran en la fig. 3. Para un valor arbitrario de θ , Kaynia y Kausel (1982) mostraron que el factor de interacción lateral puede calcularse con buena aproximación si se calculan los factores de interacción horizontales correspondientes a los ángulos de 0 y 90° , para después combinarlos de la siguiente forma

$$\alpha_{h(i,j)}(\theta) = \alpha_{h(i,j)}(0^\circ) \cos^2 \theta + \alpha_{h(i,j)}(90^\circ) \sin^2 \theta \quad (6)$$

Factor de interacción de cabeceo

Cuando a un grupo de pilotes unidos por una losa rígida se le somete a un giro, los pilotes experimentan deformaciones tanto de tipo axial como rotacional. Las ondas originadas por deformación rotacional tienen un campo de propagación muy débil, atenuándose muy pronto a una distancia de pocos diámetros a partir del eje del pilote generador. En consecuencia, la interacción entre dos pilotes debida a deformación rotacional es reducida y puede considerarse nula. Por ello, en el análisis del componente de cabeceo únicamente se considera la interacción proveniente de la deformación axial de los pilotes.

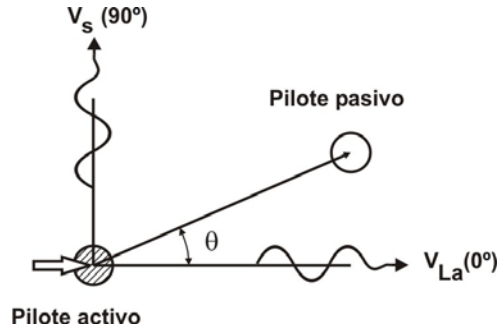


Figura 3 Ángulo entre pilotes activo y pasivo para excitación lateral

Factor de interacción de torsión

Dobry y Gazetas (1988) no proporcionaron factores de interacción para el componente de torsión, por lo que en este trabajo se desarrolló un nuevo planteamiento para determinar la impedancia global correspondiente. El método se basa en el análisis de las deformaciones que se producen en un grupo de pilotes sometido a un giro alrededor de su eje axial. Dichas deformaciones son tanto de tipo torsional como lateral; sin embargo, la interacción debida a la deformación torsional en cada pilote es muy reducida comparada con la que induce la deformación lateral. Por consiguiente, en el pilote pasivo se considera únicamente la interacción por deformación lateral inducida por el pilote activo, mediante las ecs. 4, 5 y 6.

IMPEDANCIAS DE GRUPO

Una vez definidos los factores de interacción entre pilotes, las impedancias de grupo pueden obtenerse por medio de un procedimiento de superposición. Inicialmente, se establecen relaciones entre los desplazamientos de los pilotes del grupo en función de los factores de interacción y la impedancia de un pilote aislado. Después, se prescribe un desplazamiento (o rotación) unitario global, de forma que la impedancia total puede calcularse como la suma de fuerzas (o momentos) que aparecen en el arreglo de pilotes.

Impedancia vertical

La ecuación que define la impedancia axial en un grupo con un número arbitrario n de pilotes es

$$\mathcal{K}_z^G = \frac{P^G}{w^G} \quad (7)$$

donde \mathcal{K}_z^G es la impedancia vertical del grupo de pilotes, P^G es la fuerza total aplicada al grupo de pilotes en dirección vertical y w^G es el desplazamiento de la losa rígida en dirección vertical. Si $w^G = 1$ en la ec. 7, la impedancia axial será igual a la fuerza total aplicada al grupo. Esta fuerza puede calcularse sumando las fuerzas individuales en cada pilote, que se evalúan en notación matricial como

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{Bmatrix} = \mathcal{K}_z^S \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{v(1,2)} & \cdots & \alpha_{v(1,n)} \\ \alpha_{v(2,1)} & 1 & \cdots & \alpha_{v(2,n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{v(n,1)} & \alpha_{v(n,2)} & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{Bmatrix} \quad (8)$$

donde \mathcal{K}_z^S es la impedancia axial de un pilote, mientras que P_i y w_i son la fuerza y el desplazamiento dinámicos correspondientes al pilote i en dirección vertical, respectivamente. Si se considera que la losa rígida que une los cabezales de los pilotes asegura la compatibilidad de deformaciones, el desplazamiento de cada pilote será igual al desplazamiento global: $w_1 = w_2 = \dots = w_n = w^G = 1$.

Impedancia horizontal

La impedancia lateral de un grupo de pilotes, en la dirección del eje x se encuentra dada por

$$\mathcal{K}_x^G = \frac{V^G}{u^G} \quad (9)$$

donde \mathcal{K}_x^G es la impedancia horizontal del grupo, V^G es la fuerza cortante total aplicada al grupo de pilotes y u^G es el desplazamiento horizontal de la losa rígida en dirección del eje x . Si $u^G = 1$ en la ec. 10, la impedancia axial sería igual a la fuerza cortante total aplicada al grupo. En forma similar al caso vertical, esta fuerza cortante total se determina sumando las fuerzas laterales individuales en cada pilote, que en notación matricial se expresan como

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{Bmatrix} = \mathcal{K}_x^S \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{h(1,2)} & \cdots & \alpha_{h(1,n)} \\ \alpha_{h(2,1)} & 1 & \cdots & \alpha_{h(2,n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{h(n,1)} & \alpha_{h(n,2)} & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \quad (10)$$

donde \mathcal{K}_x^S es la impedancia horizontal de un pilote, V_i es la fuerza cortante del pilote i y u_i es el desplazamiento dinámico correspondiente al pilote i en dirección horizontal, respectivamente. Con la losa rígida garantizando la compatibilidad de deformaciones, el desplazamiento de cada pilote será igual al desplazamiento global: $u_1 = u_2 = \dots = u_n = u^G = 1$.

Impedancia de cabeceo

Se considera el caso en el que se tiene una rotación de la losa rígida alrededor del eje x . La función de impedancia global de cabeceo viene dada por

$$\mathcal{K}_{rx}^G = \frac{M_{rx}^G}{\phi_{rx}^G} \quad (11)$$

donde \mathcal{K}_{rx}^G es la impedancia de cabeceo del grupo de pilotes alrededor del eje x ; M_{rx}^G y ϕ_{rx}^G son el momento total aplicado y el giro global en la losa rígida, respectivamente, también alrededor del eje

x. El momento total M_{rx}^G es resistido por el grupo de pilotes mediante dos mecanismos diferentes. El primero consiste en la suma de los momentos M_{rx}^S que pueden resistir los cabezales de los pilotes en el grupo. El segundo lo forman los momentos que generan las fuerzas axiales de cada pilote, que aparecen cuando se impone el giro global a la losa rígida, multiplicadas por su brazo de giro. Si $\phi_{rx}^G = \phi_{rx}^S = 1$, es posible obtener la impedancia global del grupo de pilotes como

$$\mathcal{K}_{rx}^G = n \mathcal{K}_{rx}^S + \sum_{i=1}^n P_i y_i \quad (12)$$

donde $\mathcal{K}_{rx}^S = M_{rx}^S / \phi_{rx}^S$ es la impedancia de cabeceo de un pilote, mientras que y_i es el brazo de palanca de la fuerza axial que aparece en el pilote, esto es, la distancia del pilote i al eje de rotación x . El signo asociado a esta distancia se considera positivo, por convención. Las fuerzas P_i se obtienen evaluando la ec. 8, con ciertas consideraciones adicionales. Al aparecer las fuerzas axiales en los pilotes para resistir el momento aplicado, los pilotes que estén en un mismo lado del eje de giro tendrán una vibración en fase, mientras que los pilotes en el lado opuesto, al moverse en sentido contrario, tendrán un movimiento fuera de fase con respecto a los primeros. En consecuencia, al calcular el coeficiente de interacción vertical α_v , entre dos pilotes ubicados en el mismo lado respecto al eje de giro, el signo del coeficiente de interacción será positivo; cuando se calcule entre dos pilotes situados en extremos opuestos del eje de giro, dicho signo será negativo. En la ec. 8, a causa del giro impuesto a la losa rígida, los desplazamientos verticales en los pilotes no son unitarios, sino que se encuentran dados por la distancia de cada pilote al eje de giro x . Así,

$$\{w\} = \{y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n\}^T \quad (13)$$

Es importante mencionar que la impedancia de cabeceo global también puede obtenerse sin modificar la ec. 8 (usando factores de interacción positivos, independientemente de la posición que guardan los pilotes del grupo respecto al eje de giro), utilizando en cambio los signos apropiados de x_i o y_i , las distancias entre el pilote i y el eje alrededor del cual ocurre la rotación. En función de la ubicación del pilote i respecto al eje de giro, los valores de x_i o y_i pueden ser positivos o negativos. Este procedimiento se expone en Avilés (2004) y es equivalente al método expuesto en este trabajo, ya que las dos alternativas conducen a los mismos resultados.

Impedancia de torsión

La función de impedancia que representa la relación entre el momento torsionante y el giro que experimenta la losa rígida alrededor del eje axial z se expresa como

$$\mathcal{K}_{rz}^G = \frac{M_{rz}^G}{\psi^G} \quad (14)$$

donde \mathcal{K}_{rz}^G es la impedancia de torsión alrededor del eje axial del grupo de pilotes; M_{rz}^G es el momento total aplicado y ψ^G es el giro global en la losa rígida, alrededor del eje axial. Al igual que en el caso de cabeceo, el grupo de pilotes resiste el momento torsionante mediante dos mecanismos. El primero lo forma la suma de las impedancias a torsión de todos los pilotes en el arreglo. El segundo está constituido por los momentos que producen las fuerzas cortantes horizontales que

aparecen en cada pilote multiplicadas por su distancia al centro de torsión. Si $\psi^G = \psi^S = 1$, la ec. 14 puede escribirse

$$\mathcal{K}_{rz}^G = n\mathcal{K}_{rz}^S + \sum_{i=1}^n V_i r_i \quad (15)$$

donde $\mathcal{K}_{rz}^S = M_{rz}^S / \psi^S$ es la impedancia de torsión de un solo pilote y r_i es el brazo de palanca de la fuerza cortante que aparece en el cabezal, es decir, la distancia del pilote i al centro de torsión. Las fuerzas cortantes que se generan en los pilotes a causa de un giro alrededor del eje axial, se muestran esquemáticamente para un grupo de 2x2 pilotes en la fig. 4.

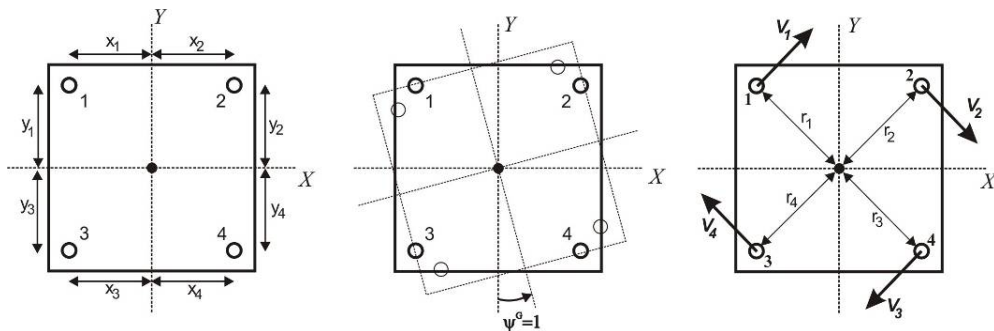


Figura 4 Fuerzas en un grupo de pilotes debidas a giro unitario alrededor del eje axial

El análisis de las fuerzas cortantes en la ec. 15 puede realizarse en dos pasos, proyectando las fuerzas horizontales V en sus componentes ortogonales, V' y V'' (fig. 5a). En el primer paso se calculan las fuerzas cortantes V' paralelas al eje Y (fig. 5b). En el segundo, se determinan las fuerzas cortantes V'' paralelas al eje X (fig. 5c). En ambos casos es necesario tomar en cuenta los efectos de grupo.

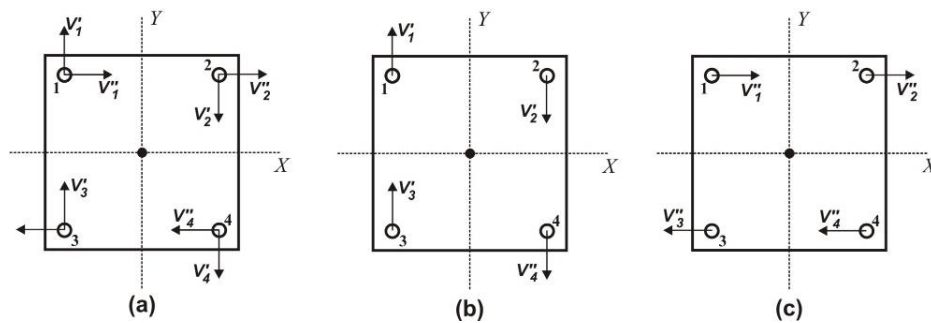


Figura 5 Pasos necesarios para determinar las fuerzas cortantes considerando torsión

La determinación de las fuerzas cortantes para ambos casos se realiza siguiendo el planteamiento de la impedancia lateral, mediante la ec. 10, con algunas consideraciones adicionales. Como se advierte en la fig. 5, existen pilotes con movimientos en sentidos opuestos entre sí (por ejemplo, los pilotes 1 y 2 en la fig. 5b y los pilotes 1 y 3 en la fig. 5c). Al analizar dichos pilotes, debe afectarse con un signo negativo al factor de interacción entre ellos. Debe observarse también

que los desplazamientos horizontales u_i en la ec. 10 no son unitarios sino que se encuentran en función del giro global. Para las fuerzas paralelas al eje Y , el vector $\{u\}$ tiene la forma

$$\{u\} = \{x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n\}^T \quad (16)$$

Mientras que para las fuerzas paralelas al eje X ,

$$\{u\} = \{y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n\}^T \quad (17)$$

En los vectores $\{u\}$ de desplazamiento horizontal, x_i y y_i son las distancias del pilote i a los ejes Y y X , respectivamente. Una vez obtenidas las fuerzas cortantes, la impedancia global de torsión se calcula como

$$\mathcal{K}_{rz}^G = n \mathcal{K}_{rz}^S + \sum_{i=1}^n V' x_i + \sum_{i=1}^n V'' y_i \quad (18)$$

De manera análoga al caso de la impedancia global de cabeceo, también puede utilizarse la ec. 10 sin modificación para evaluar la impedancia global de torsión, adoptando una convención de signos apropiada para determinar los signos de x_i o y_i .

PROGRAMA DE CÓMPUTO

Para la aplicación del método simplificado se elaboró un programa de cómputo (Cruz *et al.*, 2006). Los datos necesarios de entrada son: las propiedades de un pilote representativo del grupo y las propiedades del suelo donde se encuentra enterrado, así como la ubicación geométrica de los pilotes del arreglo. El programa calcula la impedancia de un solo pilote mediante la aproximación de Novak y Aboul-Ella (1978) y Novak y Howell (1978). Este enfoque permite considerar suelos estratificados, donde las propiedades de cada capa de suelo pueden definirse separadamente. Para calcular la impedancia global del arreglo de pilotes, considerando los efectos de grupo, se define un semiespacio homogéneo equivalente a partir del suelo estratificado real (Gómez, 2000). Los factores de interacción se calculan considerando las propiedades del semiespacio homogéneo y la ubicación geométrica de los pilotes. La impedancia de grupo se evalúa aplicando el principio de superposición.

VALIDACIÓN

Para la validación del programa de cómputo propuesto se hizo una comparación de los resultados en los componentes vertical, horizontal, cabeceo y de torsión, respecto a las soluciones rigurosas de Kaynia y Kausel (1982), así como a los resultados obtenidos con el programa comercial Dyna5 para análisis de cimentaciones (Novak *et al.*, 1995). En el componente horizontal de traslación, existe otro planteamiento desarrollado por Gómez y Roesset (1982), expuesto con detalle en Gómez (1984), que proporciona resultados similares a los obtenidos por Kaynia y Kausel (1982). Las investigaciones experimentales de El Sharnouby y Novak (1984), Novak y El Sharnouby (1984), y los estudios sobre interacción suelo-estructura de Gazetas *et al.* (1998) demuestran que la solución rigurosa de Kaynia y Kausel permite predecir satisfactoriamente la

respuesta dinámica de grupo, por lo que se considera válido utilizar dicha solución como los valores de referencia en este trabajo.

Componente vertical

Las figs. 6 y 7 presentan la rigidez dinámica vertical \bar{K}_z^G y el coeficiente de amortiguamiento dinámico $C_z^G = C_z^G(V_s/d)$, en función de la frecuencia adimensional $a_0 = \omega d/V_s$, para grupos de 2x2 y 3x3 pilotes. Se estudian distintas relaciones de rigidez pilote-suelo, por medio de las cuales se pretende considerar los casos de un suelo firme ($E_p/E_s = 100$), blando ($E_p/E_s = 1000$) y un suelo con características intermedias ($E_p/E_s = 550$). La rigidez dinámica y el coeficiente de amortiguamiento dinámico se encuentran normalizados respecto a la suma de las rigideces estáticas de los pilotes en el arreglo, $nK_z^S(a_0 = 0)$. Salvo que se especifique lo contrario, las funciones de impedancia presentadas para cada componente de movimiento corresponden a grupos de pilotes enterrados en un semiespacio homogéneo con $E_p/E_s = 1000$, $\rho_s/\rho_p = 0.70$, $\beta = 0.05$ y $L/d = 15$.

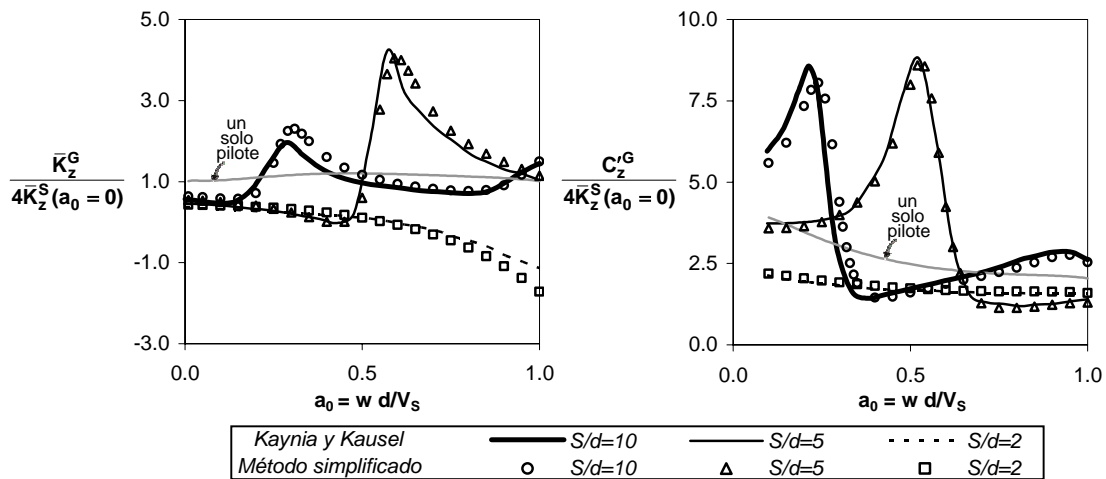


Figura 6 Impedancia vertical normalizada para un grupo de 2x2 pilotes con $E_p/E_s = 1000$. Comparación entre el método de Dobry-Gazetas (1988) y la solución rigurosa de Kaynia y Kausel (1982)

La fig. 6 muestra una correspondencia notable entre la solución rigurosa y el método simplificado, para todas las relaciones de espaciamento consideradas. En la fig. 7, se comparan las impedancias verticales obtenidas aplicando el método simplificado con el programa Dyna5 y la solución rigurosa. Se aprecia que los mejores ajustes se presentan para $E_p/E_s = 1000$, mientras que para $E_p/E_s = 100$ el método sobrestima en forma importante la rigidez y el coeficiente de amortiguamiento dinámicos.

Como los resultados obtenidos con el programa Dyna5 presentan un buen ajuste con la solución rigurosa en los valores extremos ($E_p/E_s = 100$ y $E_p/E_s = 1000$), se asume que sus resultados serán válidos para el caso intermedio, $E_p/E_s = 550$. Por lo tanto, para este caso los resultados obtenidos con Dyna5 se tomarán como valores de referencia. Para $E_p/E_s = 550$, se consigue un ajuste aceptable entre ambas soluciones, aunque el método simplificado sobrestima la rigidez y el coeficiente de amortiguamiento dinámico en la zona de amplitudes máximas, comparado con los resultados obtenidos mediante el programa Dyna5.

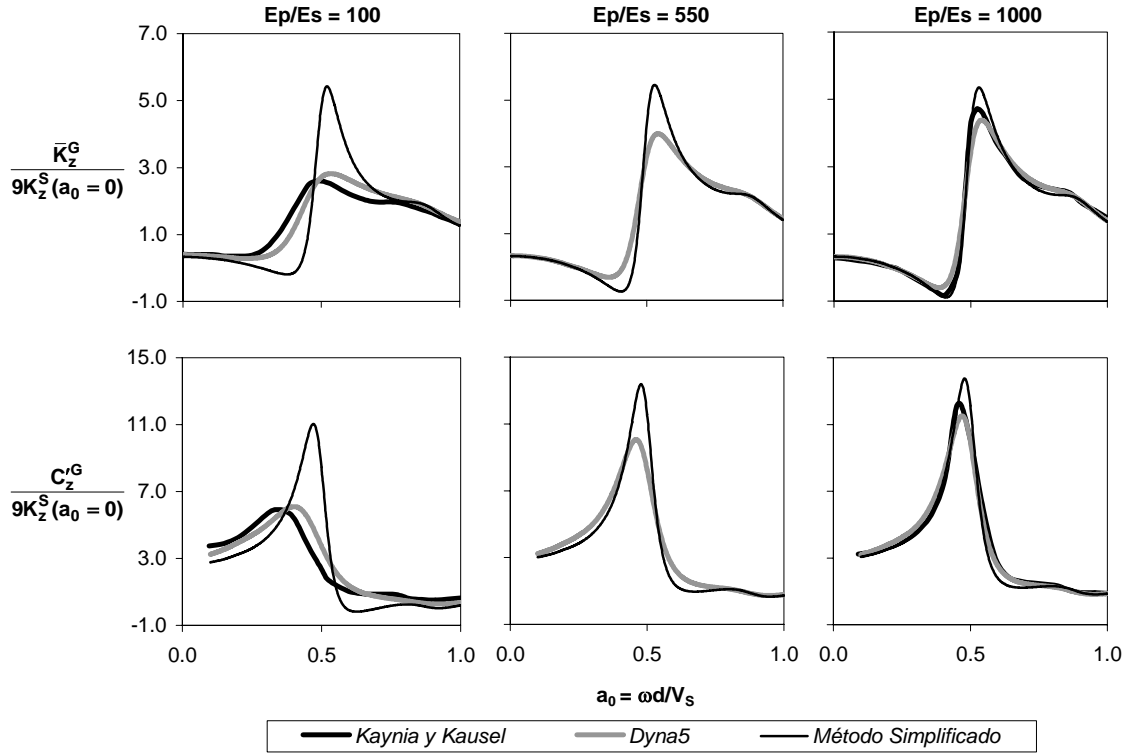


Figura 7 Impedancia vertical normalizada para un grupo de 3x3 pilotes con $S/d = 5$. Comparación entre la solución rigurosa de Kaynia y Kausel (1982) y el método de Dobry-Gazetas (1988)

Componente horizontal

En su forma original, en la formulación del método simplificado se considera que las ondas producidas por la vibración de los pilotes emanan simultáneamente, lo que es una aproximación realista en el caso de la vibración vertical, pero tiene limitaciones en el caso de la vibración lateral. Por este motivo, se han propuesto correcciones al factor de interacción horizontal. Gazetas (1991) planteó un sencillo ajuste, modificando las ecs. 4 y 5 en la forma siguiente

$$\alpha_h(90^\circ) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{S}{d}\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\beta\omega S}{V_s}\right) \exp\left(-\frac{i\omega S}{V_s}\right) \quad (19)$$

$$\alpha_h(0^\circ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{S}{d}\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\beta\omega S}{V_{La}}\right) \exp\left(-\frac{i\omega S}{V_{La}}\right) \quad (20)$$

Por otra parte, Makris y Gazetas (1992) propusieron un ajuste de tipo analítico al factor de interacción horizontal, que considera en forma realista la interacción pilote-suelo. Estos autores determinaron que era necesario multiplicar el factor de interacción lateral por el factor correctivo Λ , dado por

$$\Lambda = \frac{3}{4} \frac{k_x + i\omega c_x}{k_x + i\omega c_x - m\omega^2} \quad (21)$$

donde el resorte k_x y el amortiguador c_x en representación del suelo están dados por las ecuaciones

$$k_x \approx 1.2E_s \quad (22)$$

$$c_x = 6a_0^{-1/4} \rho_s V_s d + 2\beta \frac{k_x}{\omega} \quad (23)$$

donde ρ_s es la densidad del suelo y $m = \rho_p A_p$ es la masa específica por unidad de longitud del pilote, siendo ρ_p la densidad del material del pilote y A_p su área transversal.

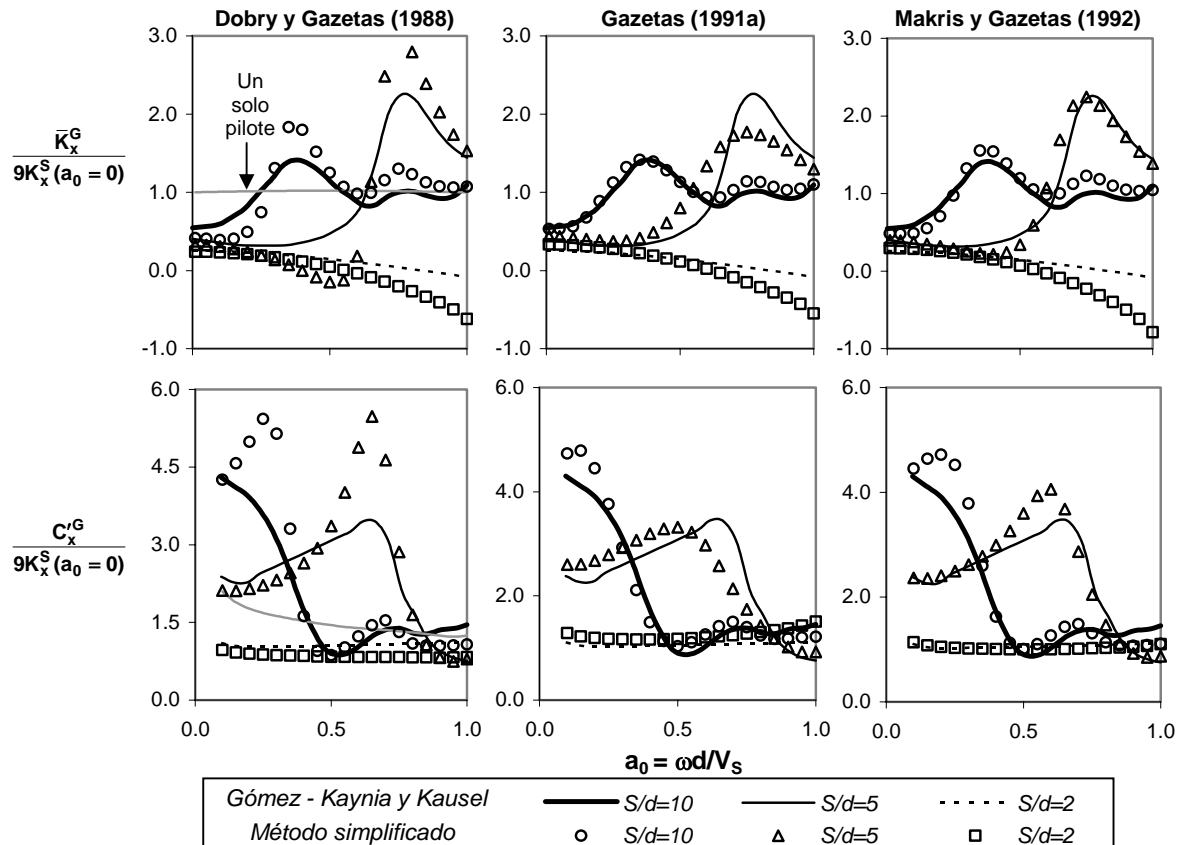


Figura 8 Impedancia horizontal normalizada para un grupo de 3x3 pilotes con $E_p/E_s = 1000$. Comparación entre el método de Dobry-Gazetas (1988) con las soluciones rigurosas de Gómez (1984) y de Kaynia y Kausel (1982).

La fig. 8 muestra una comparación entre las correcciones propuestas y el método simplificado original, para un grupo de 3x3 pilotes. La corrección analítica de Makris y Gazetas presenta un mejor desempeño, sobre todo en cuanto a la rigidez dinámica. En la fig. 9 puede observarse la comparación entre el método simplificado, el programa Dyna5 y la solución rigurosa en un grupo

de 3x3 pilotes, para relaciones de rigidez pilote-suelo $E_p/E_s = 100, 550$ y 1000 . Para $E_p/E_s = 100$, se ha usado la corrección propuesta por Gazetas (1991), y para $E_p/E_s = 550$ y 1000 , se ha utilizado la corrección de Makris y Gazetas (1992), ya que los resultados así obtenidos se aproximaban mejor los valores de referencia. Para el grupo de pilotes mostrado en la fig. 9, se aprecia una correspondencia aceptable entre el método simplificado y los valores de comparación, para las relaciones presentadas de rigidez pilote-suelo. El ajuste entre el método simplificado y la solución rigurosa se incrementa cuanto más elevada es la relación de rigideces E_p/E_s .

Componente de cabeceo

En la fig. 10 se muestra la impedancia de cabeceo normalizado alrededor del eje x para un grupo de 3x3 pilotes, obtenida mediante el método simplificado de Dobry-Gazetas, y una comparación con la solución rigurosa de Kaynia y Kausel. El factor de normalización es $\sum_1^n y_i^2 K_z^S(a_0 = 0)$, que representa la contribución de las rigideces verticales estáticas en los pilotes al mecanismo de cabeceo.

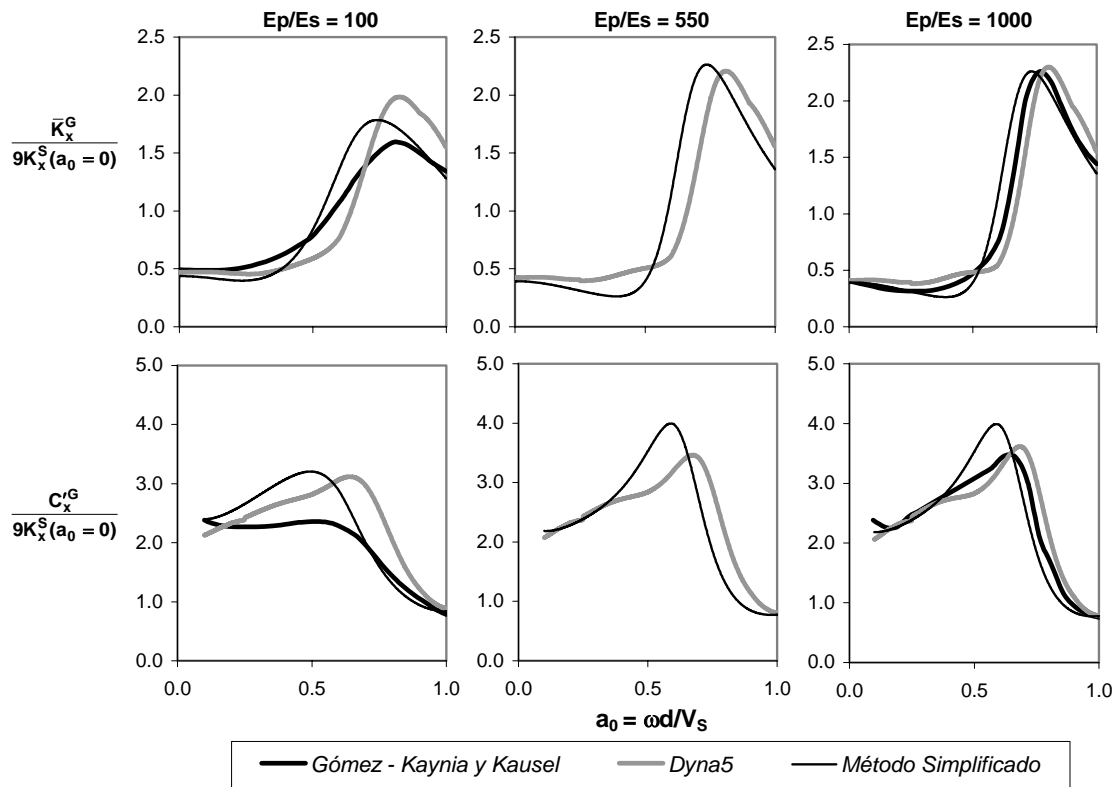


Figura 9 Impedancia horizontal para un grupo de 3x3 pilotes con $S/d = 5$. Comparación entre las soluciones rigurosas de Gómez (1984) y de Kaynia y Kausel (1982), el método de Dobry-Gazetas (1988) y el programa comercial Dyna5

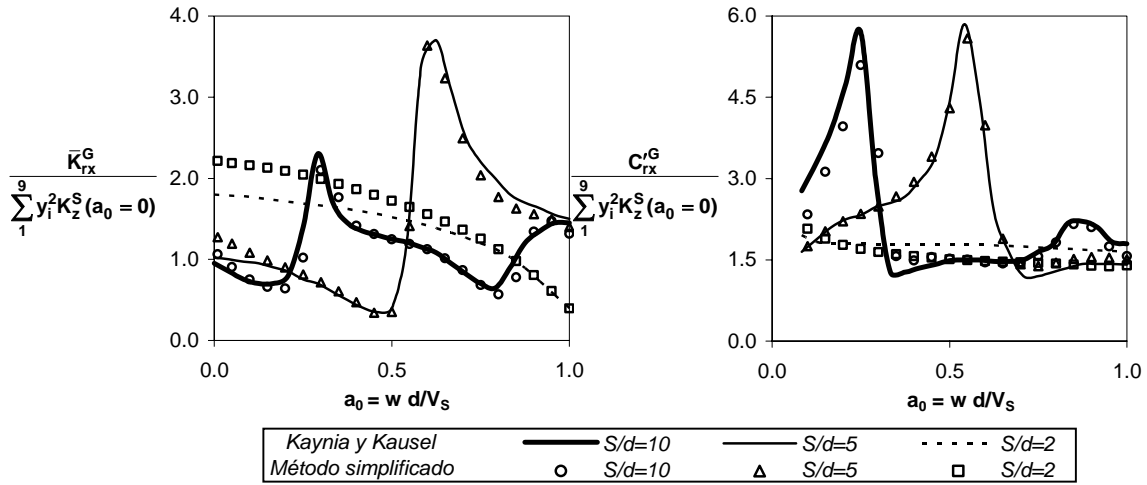


Figura 10 Impedancia de cabeceo normalizada para un grupo de 3x3 pilotes. Comparación entre el método simplificado de Dobry-Gazetas (1988) y la solución rigurosa de Kaynia y Kausel (1982)

A partir de la comparación con la solución rigurosa de la fig. 10, puede concluirse que el método simplificado proporciona una correspondencia satisfactoria con los valores de referencia. Para $S/d=2$, la comparación entre el método simplificado de Dobry-Gazetas y la solución rigurosa presenta ciertas diferencias. Esto se debe a que en grupos de pilotes poco espaciados, en rigor es necesario considerar la contribución de la deformación rotacional en el análisis, mientras que el método simplificado no toma en cuenta dicha contribución.

Debido a que el análisis del componente de cabeceo se encuentra basado en los factores de interacción vertical, la variación de la función de impedancia de cabeceo con la relación E_p/E_s es similar a la que presenta la función de impedancia axial en la fig. 7, esto es, se tienen ajustes aceptables para $E_p/E_s > 500$.

Un detalle importante a mencionar es que, al efectuar pruebas con el programa de cómputo para grupos de 5x5 pilotes en adelante, la aplicación del método simplificado conduce a la estimación de coeficientes de amortiguamiento dinámico negativos en el intervalo de bajas frecuencias, por causas aún no bien determinadas; dichos valores negativos no son admisibles.

Es posible evitar la estimación de coeficientes de amortiguamiento negativos haciendo un ajuste numérico a las ecuaciones necesarias para determinar la impedancia global. Consideremos la ec. 12, que permite obtener la impedancia de cabeceo de grupo. Esta ecuación se puede escribir

$$\mathcal{H}_{rx}^G = n\mathcal{H}_{rx}^S + \mathcal{H}_z^S \Gamma \quad (24)$$

El parámetro Γ es un factor complejo que representa la interacción de las fuerzas verticales para el mecanismo de cabeceo. El factor Γ se calcula, en forma de sumatoria, como

$$\Gamma = \sum_{i=1}^n y_i \sum_{j=1}^n y_j \nu_{v(i,j)} \quad (25)$$

donde $\nu_{v(i,j)}$ es un elemento de la inversa de la matriz de factores de interacción $[\alpha_{v(i,j)}]$ en la ec. 8.

En la ec. 24, tanto \mathcal{H}_{rx}^S como \mathcal{H}_z^S son números complejos con partes real e imaginaria positivas; por lo tanto es el parámetro Γ es quien determina la aparición del amortiguamiento negativo. Se observó que cuando la parte imaginaria de \mathcal{H}_{rx}^G era negativa, el parámetro Γ también tenía parte imaginaria negativa. Entonces, cuando en el análisis se presenta un valor de amortiguamiento menor que cero, la parte imaginaria de Γ , con valor negativo, se fija a cero a fin de evitar la inconsistencia numérica.

Componente de torsión

En este componente de movimiento se presentó el mismo problema que para el componente de cabeceo, esto es, se tuvieron coeficientes de amortiguamiento negativos para frecuencias bajas. Los valores negativos de C_{rz}^{rG} se presentaron para todos los tamaños de grupos de pilotes estudiados. Además, a bajas frecuencias, las pruebas realizadas mostraron que el método simplificado sobrestimaba el valor de la función de impedancia. Dadas estas limitantes, se implementó una corrección análoga al caso de cabeceo para evitar los coeficientes de amortiguamiento negativos, mientras que para reducir la sobrestimación de la rigidez dinámica a bajas frecuencias, se propone multiplicar la función de impedancia por un factor de corrección lineal de la forma siguiente

$$\text{Factor correctivo} = \begin{cases} a_0 + 0.7; & \text{si } a_0 \leq 0.3 \\ 1; & \text{si } a_0 > 0.3 \end{cases} \quad (26)$$

Las comparaciones entre las soluciones rigurosas de Kaynia y Kausel y el método simplificado, aplicado usando las consideraciones anteriores, se muestran en la fig. 12. En dicha figura, se muestra un grupo de 4x4 pilotes con diferentes relaciones de espaciamiento S/d . Las gráficas están normalizadas respecto al factor $\sum_1^4 r_i^2 K_x^S(a_0 = 0)$, que representa la contribución de las rigideces horizontales estáticas de los pilotes del grupo al mecanismo de torsión.

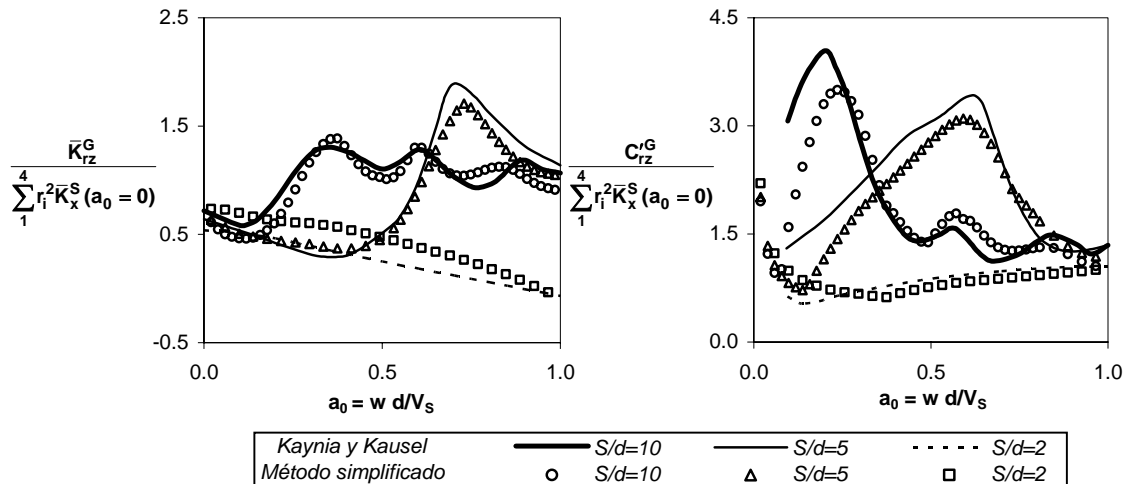


Figura 11 Impedancia de torsión para un grupo de 4x4 pilotes. Comparación entre el método de Dobry-Gazetas con la corrección de Makris y Gazetas (1992) y la solución de Kaynia y Kausel (1982)

En la fig. 11 se aprecia que el método simplificado proporciona una correspondencia aceptable comparada con la solución rigurosa, aunque el ajuste disminuye para el coeficiente de amortiguamiento para bajas frecuencias. Por lo tanto, cuando el método simplificado sea aplicado al componente de torsión, puede utilizarse para determinar la rigidez dinámica de manera confiable, mientras que la estimación del amortiguamiento a bajas frecuencias presenta dispersiones importantes.

Debido a que el análisis del componente de torsión está basado en los factores de interacción horizontales, el comportamiento de la función de impedancia de torsión respecto de la relación de rigidez E_p/E_s es semejante al de la impedancia lateral (fig. 9).

Grupos grandes de pilotes

En la literatura sólo se tienen resultados rigurosos para grupos reducidos (de 2 a 16 pilotes), mientras que la cimentación de una estructura real puede tener de 30 a 350. Para solventar esta limitante y disponer de resultados útiles para grupos con un número variable de pilotes, como los que pueden encontrarse en un caso real, se analizaron arreglos cuadrados de pilotes (7x7, 10x10, 15x15 y 18x18), así como grupos con arreglo rectangular (2x4, 4x8 y 8x16). En los grupos cuadrados, las funciones de impedancia presentaron comportamientos similares, independientemente del número de pilotes del grupo, puesto que las zonas de amplitudes máximas y mínimas en las gráficas de rigidez y amortiguamiento se presentaron aproximadamente a las mismas frecuencias adimensionales para todos los arreglos. Por otro lado, las funciones de impedancia de grupos rectangulares resultaron semejantes a las de grupos cuadrados, con lo que la forma del arreglo no parece ser un factor que influya significativamente en la forma y magnitud de las curvas de rigidez y amortiguamiento dinámico. Información más detallada sobre los grupos cuadrados y rectangulares puede consultarse en Cruz (2007).

En esta sección se presentan solamente los resultados correspondientes al grupo de 18x18 pilotes, ya que las funciones de impedancia de dicho arreglo son representativas de los grupos con un menor número de pilotes. Como valores de referencia se tomaron los resultados obtenidos con el programa Dyna5, ya que con dicho programa se logra un ajuste aceptable con las soluciones rigurosas de Kaynia y Kausel para arreglos reducidos de pilotes (grupos con menos de 20 pilotes). Debe advertirse que la correspondencia entre el método simplificado y el programa Dyna5 es satisfactoria en el intervalo de frecuencias de interés ($a_0 < 1$) únicamente para relaciones de rigidez pilote-suelo mayores a 500, mientras que para relaciones $E_p/E_s < 500$ el ajuste se limita al intervalo de bajas frecuencias ($a_0 < 0.1$), tal como se muestra en la fig. 7.

Con respecto al componente vertical, se tiene una concordancia satisfactoria entre el método simplificado y el programa Dyna5, tanto en rigidez como en el coeficiente de amortiguamiento dinámico, para todo el intervalo de frecuencias considerado ($0 \leq a_0 \leq 1$). En el componente de cabeceo, el método simplificado proporciona resultados similares al programa Dyna5 para $a_0 < 0.5$. Para los componentes horizontal y de torsión, se tienen diferencias notables entre el método simplificado y el programa Dyna5. En estos componentes de movimiento, el método simplificado en general predice las amplitudes máximas a frecuencias adimensionales menores que el programa Dyna5, lo cual conduce a discrepancias importantes tanto en forma y magnitud de las curvas de impedancia. Por ello, en los componentes horizontal y de torsión el método simplificado tiene un ajuste aceptable con los valores del programa Dyna5 únicamente en el intervalo de baja frecuencia ($a_0 < 0.1$), principalmente en cuanto a rigidez dinámica. Respecto al coeficiente de amortiguamiento, el método puede presentar dispersiones significativas respecto a los valores de referencia.

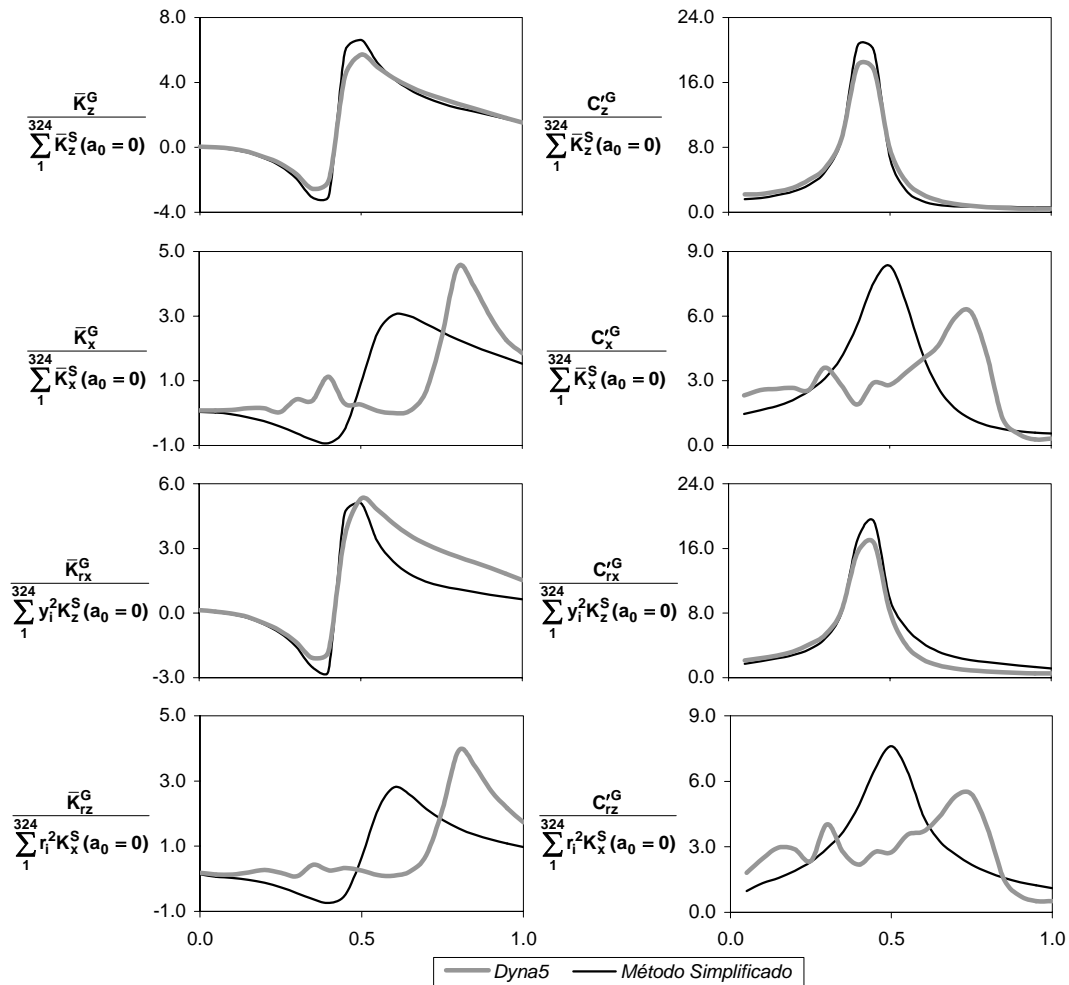


Figura 12 Funciones de impedancia normalizada para un grupo de 18x18 pilotes con $S/d=5$. Comparación entre el método simplificado de Dobry-Gazetas y el programa Dyna5

De los resultados anteriores, puede verse que el método simplificado muestra limitaciones si se tiene un número grande de pilotes y cuando la rigidez del suelo se incrementa en relación a la rigidez de los pilotes ($E_p/E_s < 500$). En el primer caso, cuando se tiene un arreglo grande ($n > 20$), físicamente se produce un aumento en el fenómeno de interferencia de ondas (constructiva y/o destructiva) en el grupo, lo cual influye en el valor de la impedancia global. El método simplificado no tiene la capacidad de considerar esta interferencia de las ondas producidas por los pilotes y en consecuencia, puede conducir a resultados que no tienen una correspondencia aceptable con las soluciones de referencia.

La influencia de la relación de rigideces pilote-suelo E_p/E_s en el desempeño del método simplificado respecto a las soluciones rigurosas, podría explicarse analizando la naturaleza de los factores de interacción del método simplificado. Tales factores fueron obtenidos a partir de la solución teórica al fenómeno de propagación de ondas generadas por una superficie cilíndrica, infinitamente rígida, vibrando en un medio homogéneo de rigidez nula. En consecuencia, el método simplificado proporciona mejores resultados cuando se tiene un contraste muy alto de rigidez pilote-suelo, es decir, cuando las condiciones físicas se asemejan a las condiciones teóricas de partida.

En la tabla 1 se proponen intervalos de frecuencia adimensional en los cuales el método simplificado presenta una concordancia satisfactoria respecto a los valores de referencia (programa Dyna5) con bajas dispersiones, con base en los resultados de la fig. 12.

Tabla 1 Valores de frecuencia adimensional para usar el método simplificado con baja dispersión en grupos grandes de pilotes

Componente de movimiento	Frecuencia adimensional
Vertical	$a_0 < 0.1$
Cabeceo	$a_0 < 0.5$
Horizontal, Torsión	$a_0 < 0.1$

APLICABILIDAD DEL MÉTODO SIMPLIFICADO

Los resultados presentados en las figs. 6 a 11 muestran que la concordancia entre el método simplificado de Dobry-Gazetas, con respecto a la solución rigurosa de Kaynia y Kausel y el programa Dyna5, depende principalmente de dos factores que están relacionados con las características estructurales del edificio. El primero es la relación de rigidez pilote-suelo y el segundo es el parámetro de frecuencia adimensional, $a_0 = \omega d/V_s$. Por lo tanto, se analizó la variación de la relación E_p/E_s y el parámetro adimensional a_0 para edificios de México, con la finalidad de conocer los alcances y limitaciones del método simplificado para estructuras en nuestro medio.

En cuanto a la relación de rigidez pilote-suelo, deben considerarse las características de suelos blandos en sitios representativos de nuestro país, así como las propiedades de los pilotes utilizados en dichos sitios. En la tabla 2 se presenta información geotécnica de tres ciudades de México (NTCDS-RCDF, 2004; Botero, 2000; Murià Vila *et al.*, 2004; Avilés *et al.*, 1997)

Tabla 2 Propiedades geotécnicas representativas de suelos blandos en tres ciudades de México

Ciudad	V_s (m/s)	γ (kN/m ³)	ν	G_s (MPa)	E_s (MPa)
México (zona lacustre)	80	12.3	0.49	8	24
México (zona de transición)	100	12.8	0.45	13	38
Acapulco	150	17.7	0.35	41	109
Manzanillo	370	17.7	0.33	246	655

En México los pilotes de concreto son los más comúnmente utilizados. Se tienen concretos con distintas características según la clase de agregados disponibles en cada zona del país. Como referencia, se consideran las propiedades de los concretos en las ciudades de México, Acapulco y Manzanillo, con lo que se pretende cubrir un intervalo amplio de casos prácticos.

Las Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto del RCDF (2004) consideran dos tipos de concreto: concreto clase 1 y concreto clase 2. En estas Normas se especifica que el módulo de elasticidad (en MPa) del concreto clase 1 se calculará como

$$E_p = 4400\sqrt{f'_c} \quad (27)$$

Para el concreto clase 2,

$$E_p = 2500\sqrt{f_c'} \quad (28)$$

donde f_c' es el esfuerzo de resistencia a compresión del concreto. Para el concreto clase 1 consideraremos dos valores de f_c' : 24.5 MPa (250 kg/cm²) y 39.2 MPa (400 kg/cm²), mientras que para el concreto clase 2 tomaremos 19.6 MPa (200 kg/cm²).

El Reglamento de Construcciones de la ciudad de Acapulco (2002), en sus Normas Técnicas correspondientes, señala que el módulo de elasticidad del concreto (en kg/cm²) se calculará como

$$E_c = 0.14w_c^{1.5}\sqrt{f_c'} \quad (29)$$

donde w_c es el peso volumétrico seco del concreto en kg/m³ y f_c' es la resistencia a compresión del concreto dada en kg/cm². Para el peso volumétrico de los concretos en Acapulco se tomará un valor representativo de 21.6 kN/m³ (2200 kg/m³) y se considerarán tres diferentes resistencias a compresión: 19.6 MPa (200 kg/cm²), 24.5 MPa (250 kg/cm²) y 39.2 MPa (400 kg/cm²).

Por su parte, el Reglamento de Construcciones de la ciudad de Manzanillo (2000) estipula que el módulo de elasticidad del concreto se calculará en base a lo establecido en el código ACI 318. En dicho reglamento la expresión para calcular E_c (en kg/cm²) es

$$E_c = 15100\sqrt{f_c'} \quad (30)$$

La cual lleva a resultados similares a la expresión correspondiente del reglamento de la ciudad de Acapulco (con una diferencia de 4.5%), si se acepta un peso volumétrico del concreto de 21.6 kN/m³ (2200 kg/m³).

En la tabla 3 se presentan los valores para el módulo de elasticidad del concreto obtenido mediante los reglamentos del Distrito Federal y la ciudad de Acapulco.

Tabla 3 Propiedades representativas de los concretos en el Distrito Federal y la ciudad de Acapulco

PARÁMETRO	REGLAMENTO						
	DISTRITO FEDERAL				ACAPULCO		
	Clase 2	Clase 1					
Clave	DF1	DF2	DF3	DF4	A1	A2	A3
f_c' (MPa)	19.6	19.6	24.5	39.2	19.6	24.5	39.2
E_c (MPa)	11099	19423	21715	27468	20042	22408	28344

Puede observarse en la tabla 3 que las propiedades del concreto clase 1 en la ciudad de México son muy similares a las del concreto en la ciudad de Acapulco. Las relaciones de rigidez pilote-suelo E_p/E_s máximas y mínimas, para los sitios de la tabla 2 en relación con los concretos de distinto módulo de elasticidad, se presentan en la tabla 4.

Los análisis para determinar la influencia de la relación E_p/E_s en el valor de las funciones de impedancia, mostrados en la sección de validación, mostraron que para valores de E_p/E_s mayores a 500 se obtienen resultados que tienen una concordancia aceptable entre el método simplificado y los valores de referencia (la solución rigurosa de Kaynia y Kausel y el programa Dyna5) en todo el

intervalo de frecuencias estudiado ($0 \leq a_0 \leq 1$). Para relaciones de rigidez E_p/E_s menores a 500, el ajuste fue satisfactorio sólo en el intervalo de bajas frecuencias. En consecuencia, en suelos blandos, como los existentes en la ciudad de México, puede esperarse una correspondencia satisfactoria entre el método simplificado y los valores de referencia para $0 \leq a_0 \leq 1$, mientras que para suelos blandos similares a los de Acapulco y Manzanillo, el método simplificado tendrá un ajuste aceptable con los valores de referencia únicamente a bajas frecuencias.

Tabla 4 Relaciones E_p/E_s representativas de suelos blandos en tres ciudades de México

Ciudad	Relación E_p/E_s	
	Mínima (DF1)	Máxima (A3)
México (zona lacustre)	470	1190
México (zona de transición)	300	750
Acapulco	100	260
Manzanillo	17	43

En lo que respecta a la frecuencia adimensional $a_0 = \omega d/V_s$, este parámetro influye significativamente en la variación y el comportamiento de las funciones de rigidez y amortiguamiento dinámicos. Por ello resulta conveniente analizar, de manera aproximada, el intervalo de frecuencias adimensionales a_0 correspondientes a estructuras cimentadas con pilotes de fricción.

En la zona de suelo blando de la ciudad de México, las estructuras en las cuales es factible el uso del método simplificado de Dobry-Gazetas son los edificios de 5 a 20 niveles, que por lo general poseen cimentaciones mixtas, formadas por un cajón y un grupo de pilotes de fricción. En edificios con una mayor cantidad de niveles se emplean generalmente pilotes de punta, mientras que en estructuras de menor altura suele bastar con un cajón o losa de cimentación. En consecuencia, el estudio de la variación de los periodos fundamentales se enfoca en edificios de 5 a 20 niveles. En la tabla 5 se muestran los valores representativos del periodo fundamental para edificios con distinto tipo de estructuración (Murià Vila y González, 1995). En dicha tabla se distingue también entre estructuras construidas antes y después de 1985.

Tabla 5 Periodos fundamentales para edificios en suelo blando, en función del número de niveles

Tipo de estructuración		Periodo fundamental (s)		
		5N	10N	20N
Marcos	Antes de 1985	0.63	1.26	2.52
Marcos y muros	Antes de 1985	0.50	1.00	2.00
	Después de 1985	0.35	0.70	1.39
Acero	Después de 1985	---	---	1.86
Mampostería	Después de 1985	0.37	---	---

Antes de 1985: Edificios construidos bajo reglamentos de construcción previos al sismo de 1985

Después de 1985: Edificios construidos bajo reglamentos de construcción posteriores al sismo de 1985

Con base en los periodos fundamentales de la tabla 5, las frecuencias circulares ω correspondientes a cada tipo de estructura están dadas por $\omega = 2\pi/T$. En la fig. 13 se muestra la variación del parámetro $a_0 = \omega d/V_s$ para edificios con distinto tipo de estructuración y número de niveles, en función del periodo dominante del suelo en la ciudad de México.

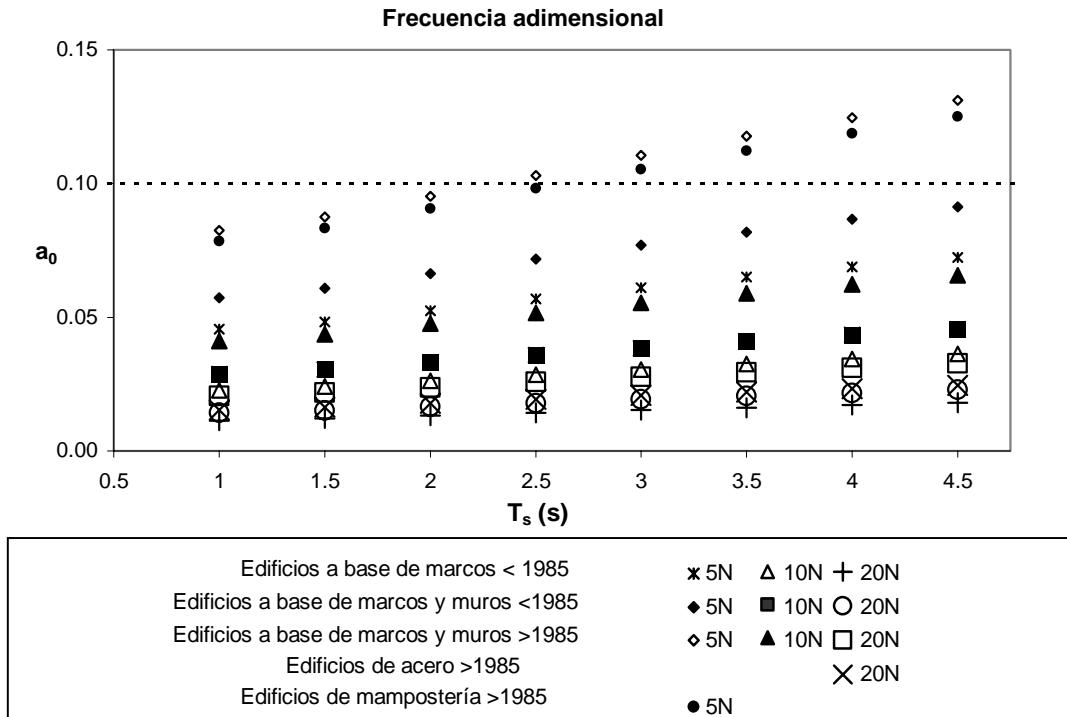


Figura 13 Valores de frecuencia adimensional para edificios en suelo blando, en función del periodo dominante del suelo

La mayor parte de las estructuras estudiadas tienen frecuencias adimensionales reducidas, menores que 0.10. El parámetro a_0 es inversamente proporcional al número de niveles; para los edificios de 20 niveles, el valor de a_0 oscila entre 0.01 y 0.03. Los mayores valores de frecuencia adimensional corresponden a edificios de 5 niveles, donde el parámetro adimensional a_0 es mayor que 0.1.

En México se dispone de información detallada acerca de la respuesta estructural y de los efectos de interacción suelo-estructura de varios edificios instrumentados. Con el fin de ilustrar los parámetros de frecuencia adimensional a_0 y la relación de rigideces pilote-suelo E_p/E_s en edificios reales, en la tabla 6 se muestran las características de cuatro edificios instrumentados (Murià Vila *et al.*, 1997; Murià Vila *et al.*, 2004), que tienen cimentaciones a base de cajón y pilotes de fricción.

Tabla 6 Parámetros de edificios reales

Edificio	Ciudad	Niveles	Periodo fundamental (s)			No. de pilotes	d (m)	V_s (m/s)	E_p (MPa)	E_s (MPa)	Frecuencia adimensional a_0			E_p/E_s
			L	T	R						L	T	R	
			TC	México	18						2.56	2.94	1.89	
PC	México	16	2.78	2.94	2.22	266	0.48	74	19600	19.1	0.01	0.01	0.02	1026
JAL	México	14	1.72	2.70	1.75	54	0.46	68	19600	18.7	0.02	0.02	0.02	1051
SIS	Acapulco	16	0.96	1.22	0.73	30	1.20	148	19600	106.2	0.05	0.04	0.07	185

Como se advierte en la tabla 6, los cuatro edificios presentados tienen frecuencias adimensionales muy reducidas, lo cual confirma los datos de la fig. 13. En cuanto a los límites de relación de rigidez pilote-suelo, los tres edificios ubicados en la ciudad de México, desplantados en suelo blando, satisfacen la relación $E_p/E_s > 500$. Solamente el edificio SIS, ubicado en terreno arenoso en la ciudad de Acapulco, tiene una relación de rigidez pilote-suelo menor a 500. Esto indica que se tendrían limitaciones en la determinación de las funciones de impedancia a frecuencias intermedias y altas. Sin embargo, debe considerarse que el parámetro a_0 correspondiente al edificio SIS tiene un valor reducido, lo cual lo ubica en el intervalo de baja frecuencia donde el ajuste entre los valores de referencia y el método simplificado sigue siendo satisfactorio.

APLICACIÓN A UN EDIFICIO INSTRUMENTADO

Para ilustrar las bondades del método simplificado propuesto, se aplicó en un edificio instrumentado de 18 niveles ubicado en la zona del lago en la ciudad de México. Los resultados del análisis de los efectos ISE en el componente longitudinal del edificio se compararon con el procedimiento descrito en el Apéndice A de las Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo del Reglamento de Construcciones del DF (NTCDS-RCDF, 2004), el programa comercial Dyna5 (Novak *et al.*, 1995), y un método con base en datos experimentales (Luco, 1980).

Descripción del edificio

El edificio se encuentra desplantado sobre suelo blando con un periodo dominante del suelo de 1.8 a 2.1 s. Tiene una cimentación mixta a base de cajón y pilotes de punta penetrante. El edificio cuenta con 18 niveles incluyendo un apéndice, y su estructuración es a base de trabes, columnas y muros de concreto reforzado. El sistema de piso es losa plana aligerada. La cimentación del edificio (fig. 14) consiste en un cajón de cimentación semicompensado con un desplante de 6.5 m, además de 323 pilotes hincados hasta 33.0 m de profundidad. Los pilotes son de concreto, de sección transversal cuadrada (40x40 cm) y tienen una longitud total de 26.5 m.

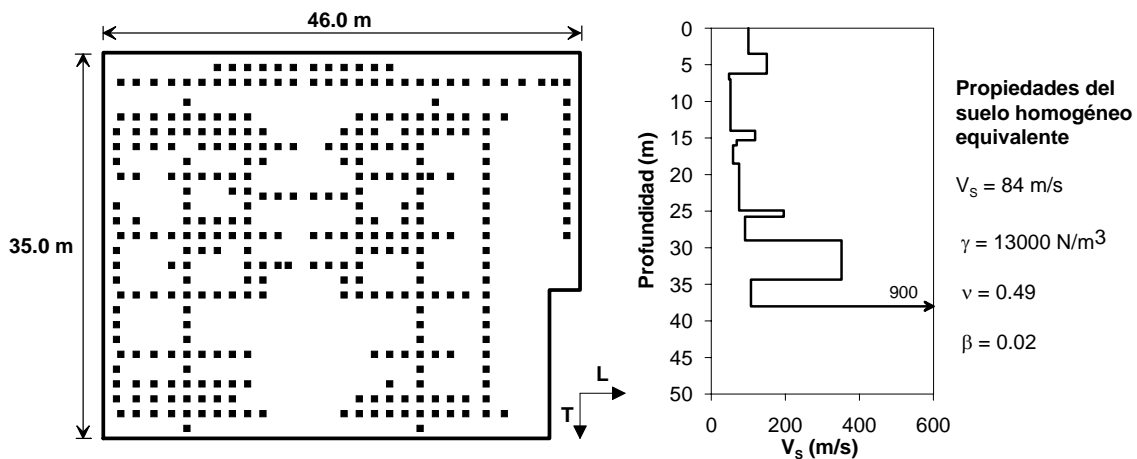


Figura 14 Planta de cimentación y perfil de velocidad de ondas de corte

Resultados de los análisis

En el cálculo de las rigideces de la cimentación se emplearon tres métodos analíticos y uno semi-empírico. Los métodos analíticos se refieren al procedimiento del Apéndice A de las NTCDS-RCDF (2004), al programa Dyna5 y al método simplificado propuesto en este trabajo, mientras que el método semi-empírico usado fue el método propuesto por Luco (Luco, 1980).

El método del Apéndice A de las NTCDS-RCDF (2004) no incluye la consideración de los efectos de grupo de pilotes, mientras que con el programa Dyna5 fue posible modelar las dos opciones, con y sin efectos de grupo. Las fórmulas para determinar las rigideces del cajón y pilotes planteadas en el apéndice A de las NTCDS-RCDF (2004) están basadas en las expresiones presentadas en el manual que elaboró Gazetas (1991). Debido que el apéndice A no incluye la manera de calcular la rigidez asociada a la torsión de la base, esta se calculó con la expresión propuesta en dicho manual. Por su parte, el programa Dyna5 permite la evaluación de la rigidez del cajón mediante las expresiones de Novak y Beredugo (1972), Beredugo y Novak (1972) y Kausel y Ushijima (1979). Para el análisis de los efectos de grupo, el programa Dyna5 utiliza los factores de interacción estáticos de Poulos y Davis (1980), y los factores dinámicos de Kaynia y Kausel (1982).

El método de Luco emplea como datos de entrada señales de aceleración o desplazamiento, medidas en puntos seleccionados de la estructura y la cimentación. El método de Luco ha sido aplicado en varios trabajos en los que se estudian los efectos ISE de estructuras instrumentadas en México (Murià Vila *et al.*, 2004, Correa y Murià Vila, 2005). En este edificio se han registrado en diversos puntos las aceleraciones de cuatro eventos sísmicos de pequeña intensidad. Para el análisis, se seleccionó el evento del 28 de agosto de 2004, que corresponde a un sismo cuyo epicentro se localizó en las costas de Oaxaca con una magnitud M_w de 5.7. Las aceleraciones máximas registradas en el terreno y en la azotea del edificio fueron de 1.81 y 3.24 cm/s^2 , respectivamente.

Las rigideces de la cimentación, mostradas en la tabla 7 y la fig. 15, corresponden a los componentes de traslación (K_{hL}) y cabeceo (K_{CL}) en dirección longitudinal (L), además del componente de torsión (K_{Tor}). Se presentan los casos estático y el dinámico. Se ha agregado la aportación del cajón calculada con Dyna5 a los valores del método simplificado, para calcular la rigidez total de la cimentación.

Tabla 7 Rigideces de la cimentación

Parámetro	Caso estático				Caso dinámico				Luco
	NTC	Dyna5	Dyna5 (EG)	DG	NTC	Dyna5	Dyna5 (EG)	DG	
K_{hL} ($\text{N/m} \times 10^9$)	Cajón	1.86 (14%)	2.08 (13%)	2.08 (64%)	2.08 (81%)	1.85 (14%)	1.92 (12%)	1.92 (61%)	1.92 (81%)
	Pilotes	11.64 (86%)	13.77 (87%)	1.18 (36%)	0.49 (19%)	11.64 (86%)	13.77 (88%)	1.19 (39%)	0.46 (19%)
	Total	13.5	15.85	3.25	2.56	13.5	15.69	3.11	2.38
K_{CL} ($\text{N}\cdot\text{m}/\text{rad} \times 10^{12}$)	Cajón	1.19 (9%)	1.12 (14%)	1.12 (54%)	1.12 (52%)	0.99 (7%)	0.99 (13%)	0.99 (55%)	0.99 (60%)
	Pilotes	11.73 (91%)	6.89 (86%)	0.97 (46%)	1.03 (48%)	13.16 (93%)	6.89 (87%)	0.8 (45%)	0.66 (40%)
	Total	12.92	8.01	2.08	2.15	14.15	7.88	1.78	1.64
K_{Tor} ($\text{N}\cdot\text{m}/\text{rad} \times 10^{12}$)	Cajón	1.3 (29%)	1.59 (29%)	1.59 (69%)	1.59 (76%)	1.19 (27%)	1.45(28%)	1.45 (69%)	1.45 (83%)
	Pilotes	3.22 (71%)	3.8 (71%)	0.72 (31%)	0.50	3.22 (73%)	3.8(72%)	0.64 (31%)	0.31
	Total	4.52	5.39	2.31	2.09	4.41	5.26	2.1	1.76

NTC: Apéndice A de las NTC-RDF 2004

Dyna5: Programa Dyna5 sin incluir efectos de grupo de pilotes

Dyna5 (EG): Programa Dyna5 incluyendo efectos de grupo de pilotes

DG: Método simplificado de Dobry y Gazetas

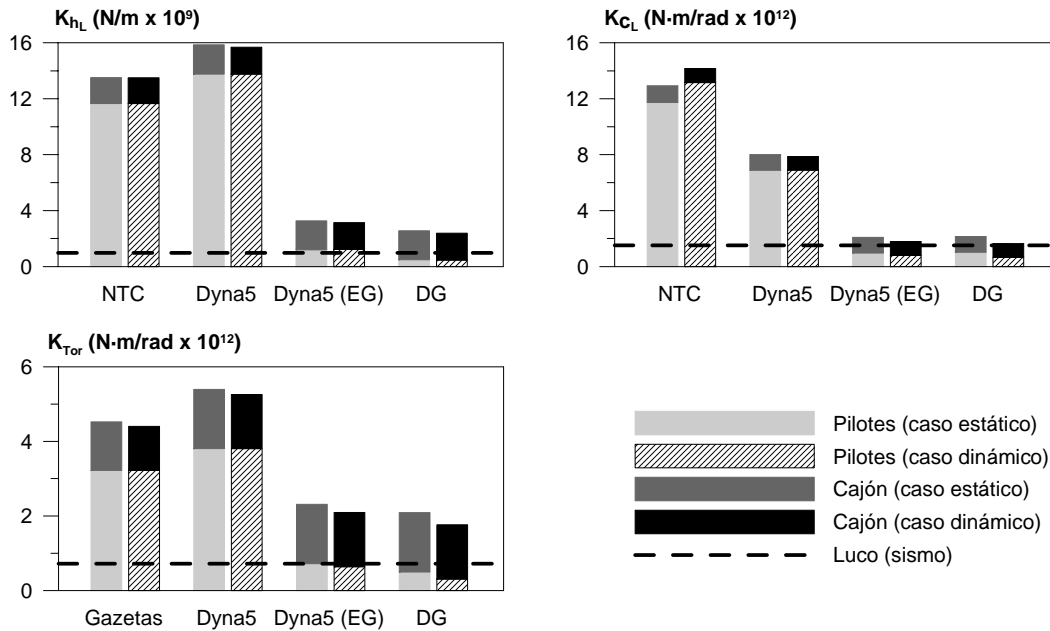


Figura 15 Rigideces de la cimentación en el edificio

A partir de los resultados mostrados en la fig. 15, puede advertirse que el considerar o no los efectos de grupo en el análisis de los efectos ISE puede conducir a diferencias notables de rigidez en la cimentación. Cuando se tienen en cuenta los efectos de grupo en el arreglo de pilotes, se presentan reducciones significativas en las rigideces totales de la cimentación (80% en traslación, 77% en cabeceo y 60% en torsión), respecto a aquellas obtenidas sin considerarlos. Estos resultados son congruentes con ensayos experimentales realizados por Novak y El Sharnouby (1984) en los que para un sistema a escala reducida de 1/15 con 102 pilotes y una relación de espaciamiento $S/d = 3$, se encontró una reducción en la rigidez de traslación de 70%. En el edificio en estudio, se tiene una mayor cantidad de pilotes y la relación de espaciamiento es de cerca de 3.4. Aunque para pilotes más separados debería esperarse una reducción de los efectos de grupo, el mayor número de pilotes en la cimentación del edificio produce un incremento en dichos efectos, lo que conduce a valores congruentes con los encontrados por Novak y El Sharnouby. Resultados similares se obtuvieron del estudio de otro edificio alto de la ciudad de México (Correa y Murià Vila, 2005).

Las rigideces experimentales calculadas con el método de Luco (1980), consideradas como los valores de referencia, se aproximan más al modelo Dyna5 (EG) y al método simplificado (DG), comparadas con los modelos de la cimentación donde no se consideran los efectos de grupo. El método simplificado y el modelo Dyna5 (EG) proporcionan resultados similares en el componente de cabeceo, mientras que en traslación y torsión presentan ciertas diferencias. Por otro lado, la comparación del método simplificado (modelo DG) con el procedimiento del Apéndice A de las NTCDS-RCDF (2004) y el modelo Dyna5 que no consideran los efectos de grupo, resalta la importancia de considerar en el análisis los efectos de interacción entre pilotes, puesto que las rigideces de la cimentación obtenidas con los dos tipos de modelos presentan diferencias significativas.

CONCLUSIONES

El método simplificado presentado se comparó con las soluciones rigurosas de Kaynia y Kausel (1982), Gómez (1984), y con el programa comercial Dyna5 (Novak *et al.*, 1995). En grupos pequeños de pilotes (menores de 20 pilotes), la correspondencia entre el método simplificado propuesto y la solución rigurosa es notable, sobre todo para el componente vertical. Para la dirección horizontal de movimiento, se han presentado dos correcciones al factor de interacción lateral (Gazetas, 1991, y Makris y Gazetas, 1992) cuyo objetivo es considerar en forma realista la interacción suelo-pilote. En este estudio se encontró una limitante en los componentes de cabeceo y de torsión, ya que la aplicación del método conduce a la estimación numérica de coeficientes de amortiguamientos negativos en el intervalo de bajas frecuencias, por razones aún no bien determinadas. El problema se presentó en arreglos mayores a 20 pilotes en cabeceo y para grupos con cualquier número de pilotes en el componente de torsión. Para solventar esta limitación se propuso un ajuste numérico que permite evitar la aparición de amortiguamientos negativos y proporcionar un valor aproximado para el coeficiente de amortiguamiento (Cruz, 2007).

El análisis de grupos con un número grande de pilotes mostró que, para las curvas de rigidez dinámica correspondientes a los componentes vertical y de cabeceo, se tiene un ajuste satisfactorio entre el método simplificado y el programa Dyna5 en los intervalos $0 \leq a_0 \leq 1$ para el componente vertical y $0 \leq a_0 \leq 0.5$ para el componente de cabeceo, mientras que para los componentes horizontal y de torsión se tiene un ajuste aceptable en un intervalo más reducido, $0 \leq a_0 \leq 0.1$. En cuanto al coeficiente de amortiguamiento dinámico, no se tiene una correspondencia satisfactoria entre los resultados y el programa Dyna5.

En los análisis para determinar la influencia de la relación de rigidez pilote-suelo, se encontró que el ajuste entre el método simplificado y la solución rigurosa mejora cuanto más elevada es la relación E_p/E_s . A partir de las pruebas realizadas, se observó que para relaciones E_p/E_s mayores a 500, como las que se presentan en los suelos blandos del valle de México, los resultados del método simplificado y los valores de referencia (solución rigurosa de Kaynia y Kausel, programa comercial Dyna5) concuerdan aceptablemente en el intervalo $0 \leq a_0 \leq 1$. En cambio, para suelos más firmes, donde la relación de rigideces E_p/E_s es menor que 500, se tuvieron ajustes aceptables entre el método simplificado y las soluciones de referencia en un intervalo más reducido, $0 \leq a_0 \leq 0.1$.

Dado que la mayoría de los edificios cimentados con pilotes de fricción (edificios de 5 a 20 niveles) poseen frecuencias adimensionales a_0 reducidas (menores que 0.1), en tales estructuras es factible la aplicación del método simplificado, ya que en el intervalo de baja frecuencia dicho método presenta una correspondencia aceptable con los valores de referencia, para los grupos de pilotes y relaciones E_p/E_s estudiadas en este trabajo. Cabe señalar que en aquellas estructuras donde el parámetro de frecuencia adimensional tiene un valor reducido ($a_0 < 0.05$), es válido utilizar factores de interacción estáticos para estimar las impedancias globales. Para frecuencias reducidas, además de conducir a resultados muy aproximados al caso dinámico, el uso de factores de interacción estáticos simplifica los cálculos.

La aplicación del método simplificado a un edificio real condujo a resultados que concuerdan satisfactoriamente con las rigideces experimentales de la cimentación, obtenidas con el método de Luco, y con los resultados obtenidos con el programa comercial Dyna5.

Los análisis presentados indican que el método simplificado constituye una herramienta útil, de uso sencillo, que permite obtener valores de rigidez dinámica apegados a los valores rigurosos, aunque presenta ciertas limitaciones en cuanto a la estimación de los valores de amortiguamiento dinámico. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que la rigidez de una cimentación, en edificios con pilotes de fricción (de entre 5 y 20 niveles y desplantados en suelo blando) es uno de los parámetros más significativos que controlan en general la respuesta estructural. En consecuencia, la metodología simplificada propuesta en este trabajo puede utilizarse con buenos resultados en la práctica profesional, siendo el método una alternativa sencilla y eficiente para la estimación de funciones de impedancia en cimentaciones a base de pilotes de fricción.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece el apoyo económico proporcionado por la Secretaría de Obras del Gobierno del Distrito Federal para la realización de este estudio. Asimismo, se reconoce la eficiente labor del grupo de técnicos académicos a cargo de la operación y mantenimiento de la instrumentación sísmica del edificio estudiado en este trabajo. Se agradece a Marco Macías Castillo y Gerardo Rodríguez Gutiérrez por el procesamiento de los registros sísmicos obtenidos en el edificio. Se reconoce a Baruo Daniel Aldama Sánchez por la elaboración de la interfaz gráfica del programa de cómputo utilizado en este trabajo y a Javier Ferretiz Herrera por la información estructural del edificio. Se agradece especialmente a Javier Avilés López, a Roberto Gómez Martínez y a Efraín Ovando Shelley por sus valiosas observaciones y comentarios a este trabajo.

REFERENCIAS

- Avilés, J (2004), *Curso de interacción suelo-estructura*, Sociedad Mexicana de Ingeniería Estructural, A.C., México D.F., marzo, 127 pp.
- Avilés, J, J M Espinosa, A López y V Trueba (1997), “Instalaciones Industriales”, *Macrosismo de Manzanillo*, Editor Arturo Tena Colunga, Sociedad Mexicana de Ingeniería Sísmica A.C., Universidad de Colima y Gobierno del Estado de Colima, Colima, Col., México, septiembre, pp. 172-196.
- Beredugo, Y O y M Novak (1972), “Coupled horizontal and rocking vibration of embedded footings”, *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 9, No. 4, pp. 477-97.
- Botero, J C (2000), “Efectos de interacción suelo-estructura considerando la flexibilidad del suelo y el desprendimiento parcial de la cimentación”, *Tesis de Doctorado*, Posgrado de Ingeniería de la UNAM, México.
- Correa, V M y D Murià Vila (2005), “Efectos de interacción suelo-estructura de un edificio instrumentado con modos de vibración acoplados”, *Memorias del XV Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica*, Acapulco Gro., México.
- Cruz, C A (2007), “Procedimiento simplificado para calcular rigideces y amortiguamientos en edificios cimentados con pilotes de fricción”, *Tesis de Maestría*, Posgrado de Ingeniería de la UNAM, México.
- Cruz, C A, J Camargo, D Murià Vila y B D Aldama (2006), “Pilotes EG: Un programa para determinar funciones de impedancia en grupos de pilotes de fricción”, *Informe del Instituto de Ingeniería*, UNAM, México.
- Dobry, R y G Gazetas (1988). “Simple method for dynamic stiffness and damping of floating pile groups”, *Geotechnique*, Vol. 38 No. 4, pp. 557-574.

- El Sharnouby, B y M Novak (1984), "Dynamic experiments with group of piles", *Journal of Geotechnical Engineering*, Vol. 110, No. 6, pp. 719-737.
- El Sharnouby, B y M Novak (1985), "Static and low frequency response of pile groups", *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 22, No. 1, pp. 79-94.
- Gazetas, G (1991), "Foundation vibrations", *Foundation Engineering Handbook*, segunda edición, Van Nostrand Reinhold, pp. 553-593.
- Gómez, R (1984) "Rigidez dinámica de grupos de pilotes bajo cargas laterales armónicas", *Tesis de Doctorado*, Posgrado de Ingeniería de la UNAM, México.
- Gómez, R y J M Roesset (1982), "Dynamic stiffness of pile groups", *Internal Report Department of Civil Engineering*, Universidad de Texas en Austin.
- Gómez, A (2000), "Presentación de un modelo matemático para el cálculo del periodo fundamental de vibración en suelos estratificados con capacidad de predecir efectos de amplificación o atenuación dinámica", *XII Congreso Nacional de Ingeniería Estructural*, noviembre.
- Kausel, E y R Ushijima (1979), "Vertical and torsional stiffness of cylindrical footing", *Civil Engineering Department. Report R79-6*, MIT, Cambridge, Massachusetts.
- Kaynia, A M y E Kausel (1982), "Dynamic behavior of pile groups", *Memorias de la 2nd International Conference on Numerical Methods in Offshore Piling*, Austin, Texas, pp. 509-532.
- Makris, N y G Gazetas (1992), "Dynamic pile-soil-pile interaction – part II: lateral and seismic response", *Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 21 No. 2, pp. 145-162.
- Murià Vila, D, L Alcántara, R Durán, M A Macías, S L Maldonado, L E Pérez, A Tena y R Vázquez (1997), "Edificios instrumentados", *Macrosismo de Manzanillo*, Editor Arturo Tena Colunga, Sociedad Mexicana de Ingeniería Sísmica A.C., Universidad de Colima y Gobierno del Estado de Colima, Colima, Col., México, septiembre, pp. 197-232.
- Murià Vila, D, L Fuentes y R González (2000), "Incertidumbres en la estimación de las frecuencias naturales de vibración de edificios", *Información Tecnológica*, Vol. 11, No. 3, Chile, diciembre, pp.177-184.
- Murià Vila, D, R Taborda y A Zapata (2004), "Soil-structure interaction effects in two instrumented tall buildings" *Memorias de la 13th World Conference on Earthquake Engineering*, Vancouver, Canadá, agosto 1-6, 2004.
- Nogami, T (1979), "Dynamic Group Effect of Multiple Piles Under Vertical Vibration", *Proceedings ASCE Engineering Mechanics Specialty Conference*, Austin, Texas, pp. 750-754.
- Novak, M, M Sheta, L El-Hifnawi, H El-Marsafawi, H El-Naggar, O Ramadan y K El-Sawy (1995), *Dyna5 para Windows 95®*, Geotechnical Research Centre, Universidad de Western Ontario.
- Novak, M y F Aboul-Ella (1978), "Impedance functions of piles in layered media," *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 104, No. EM6, Proceedings Paper 13847, junio, pp. 643-661.
- Novak, M y Y O Beredugo (1972), "Vertical Vibration of Embedded Footings", *Journal of Soil Mechanics and Foundation Division*, ASCE, SM12, diciembre, pp.1291-1310.

- Novak, M y B El Sharnouby (1984), "Evaluation of Dynamic Experiments on Pile Group", *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol. 110, No. 6, pp. 738-756.
- NTCDS-RCDF (2004), Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, México D.F.
- Poulos, H G (1971), "Behaviour of Laterally Loaded Piles: Part 2 - Group Piles", *Journal of Soil Mechanics and Foundation Division*, ASCE, Vol. 97 No. 5, pp. 733-751.
- Poulos, H G y E H Davies (1980), *Pile Foundations Analysis and Design*, John Wiley and Sons, 397 pp.
- Roesset, J M (1984), "Dynamic Stiffness of Pile Groups", *Analysis and Design of Pile Foundations*, ASCE, pp. 263-286.
- Waas, G y H Hartmann (1984), "Seismic analysis of pile foundations including pile-soil-pile interaction," *Proceedings 8th World Conference on Earthquake Engineering*, San Francisco, Ca., Vol. 5, pp. 55-62.
- Whitman, R y J Bielak (1980), "Chap. 7: Foundations", *Design Earthquake Resistant Structures*, Ed. E. Rosenblueth, Pentech Press, England.
- Wolf, J P y G A Von Arx (1982), "Impedance functions of a group of vertical piles", *Proceedings ASCE Specialty Conference on Earthquake Engineering and Soil Dynamics*, Pasadena, California, Vol. 2, pp. 1024-1